Universität Basel

Prof. Dr. H. Harbrecht

Integralgleichungen und Randelemente Frühjahrsemester 2020

Übungsblatt 2.

Abgabe bis: **Dienstag, 10.03.2020, 12:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Fouriertransformation | 4 Punkte).

Zeigen Sie für die Funktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ die folgenden Eigenschaften der Fourier-Transformation:

(a) *Differentiationsregel:*

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{F}\varphi)(\boldsymbol{\xi}) = (-i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\mathcal{F}(\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi)(\boldsymbol{\xi})$$
$$\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{F}\varphi)(\boldsymbol{\xi}) = (-i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\mathcal{F}(\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi)(\boldsymbol{\xi})$$

(b) *Translation um* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$*:*

$$\big(\mathcal{F}\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big)(\boldsymbol{\xi}) = e^{i\langle \mathbf{y},\boldsymbol{\xi}\rangle}(\mathcal{F}\varphi)(\boldsymbol{\xi})$$

(c) *Satz von Plancherel:*

$$(\varphi,\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (\mathcal{F}\varphi,\mathcal{F}\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad \text{und insbesondere} \quad \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\mathcal{F}\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

(d) *Faltung:*

$$\mathcal{F}\varphi \cdot \mathcal{F}\psi = (2\pi)^{-d/2}\mathcal{F}(\varphi * \psi) \quad \text{mit} \quad (\varphi * \psi)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

(e) *Selbstabbildung:*

$$\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Aufgabe 2 (schwache und distributionelle Ableitungen | 4 Punkte).

Gegeben seien die Funktionen $u_1, u_2 : (0,2) \to \mathbb{R}$ mit

$$u_1(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in (0,1], \\ 1, & \text{falls } x \in (1,2), \end{cases} \quad \text{und} \quad u_2(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in (0,1], \\ 2, & \text{falls } x \in (1,2). \end{cases}$$

Berechnen Sie die ersten und zweiten distributionellen Ableitungen von T_{u_1} und T_{u_2}, sowie die schwachen Ableitungen von u_1 und u_2, falls diese existieren.

Aufgabe 3 (Doppelschichtpotential | 4 Punkte).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, dessen Rand $\Gamma = \partial\Omega$ sei gegeben durch eine zweimal stetig differenzierbare Parametrisierung $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to \Gamma$ mit $\boldsymbol{\gamma}^{(\ell)}(0) = \boldsymbol{\gamma}^{(\ell)}(1)$, $\ell = 0,1,2$. Der Doppelschichtoperator für das Dirichlet-Problem ist gegeben durch

$$(\tilde{\mathcal{K}}\tilde{\rho})(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 k(s,t)\tilde{\rho}(t)\mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad k(s,t) := \frac{\langle \boldsymbol{\gamma}(s)-\boldsymbol{\gamma}(t), \mathbf{n}_t\rangle}{\|\boldsymbol{\gamma}(s)-\boldsymbol{\gamma}(t)\|^2}\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|.$$

Zeigen Sie

$$\lim_{s\to t} k(s,t) = \frac{\langle \boldsymbol{\gamma}''(t), \mathbf{n}_t\rangle}{2\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|}.$$

Aufgabe 4 (C^∞-Funktionen | 4 Punkte)**.**

Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{1/(t-1)}, & \text{falls } t < 1 \\ 0, & \text{falls } t \geq 1 \end{cases}$$

beliebig oft stetig differenzierbar ist.

Hinweis. Überprüfen Sie, dass es Polynome $p_k \in \Pi_k$ gibt, so dass für die k-te Ableitung von φ gilt

$$\varphi^{(k)}(t) = \frac{e^{1/(t-1)}}{(t-1)^{2k}} \cdot p_k(t) \quad \text{für alle } t < 1.$$