Übungsblatt 9.

Abgabe bis: **Freitag, 23.11.2018, 12:00 Uhr**

Aufgabe 1 (Häufigkeitsverteilung | 3 Punkte).

An 60 Tannen eines 40-jährigen Bestandes wurde der Durchmesser auf Brusthöhe gemessen (Angaben in cm):

16	15	17	16	19	17	16	16	16	18
15	14	14	14	15	11	7	8	10	9
11	11	13	12	12	12	14	13	13	15
11	9	12	10	12	11	12	14	13	11
12	14	15	13	14	15	18	16	17	16
15	14	13	14	14	12	14	12	13	12

a) Geben Sie unter Verwendung der Klasseneinteilung

$$6.5 - 8.5, \quad 8.5 - 10.5, \quad \ldots, \quad 18.5 - 20.5$$

die vollständige Häufigkeitstabelle an (siehe Beispiel 6.4 aus der Vorlesung).

b) Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung mithilfe eines Histogramms grafisch dar.

Aufgabe 2 (statistische Masse | 4 Punkte).

Gegeben sei die Stichprobe vom Umfang 10 einer $\mathcal{N}(\cdot,\cdot)$-verteilten Zufallsgrösse X:

$$51\,,\ 47\,,\ 43\,,\ 49\,,\ 50\,,\ 53\,,\ 51\,,\ 62\,,\ 54\,,\ 50\,,\ 46\,,\ 53.$$

a) Schreiben Sie die Stichprobe in Form einer Variationsliste und geben Sie die Variationsbreite an. Was ist der Modalwert D?

b) Geben Sie den Mittelwert $\overline{x}$ und den Median $\widetilde{x}$ an.

c) Geben Sie die empirische Varianz und und den empirischen Variationskoeffizienten an.

d) Zeichnen Sie einen Boxplot der Stichprobe. Dabei soll die Länge der Antennen nicht das 1.5-fache der Boxlänge überschreiten.

Aufgabe 3 (Erwartungstreue | 5 Punkte)**.**

a) Untersuchen Sie für eine Grundgesamtheit X mit Parameter $\vartheta \in \Theta$, für die $E_\vartheta(X)$ für alle $\vartheta \in \Theta$ existiert, ob die folgenden Schätzfunktionen $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ für die Funktion $\tau(\vartheta) := E_\vartheta(X)$ erwartungstreu sind:

$$\begin{aligned}
T_n(X_1, \ldots, X_n) &:= X_1, \\
U_n(X_1, \ldots, X_n) &:= 0.3 \cdot X_1 + 0.9 \cdot X_2 - 0.5 \cdot X_3, \\
V_n(X_1, \ldots, X_n) &:= \sum_{i=1}^{n} X_i - n\overline{X}_n + X_2, \\
W_n(X_1, \ldots, X_n) &:= \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + 2X_1.
\end{aligned}$$

b) Ist das gewichtete arithmetische Mittel, definiert durch

$$G_n(X_1, \ldots, X_n) := \sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i$$

mit $\omega_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, und $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$, erwartungstreu für $\tau(\vartheta) := E_\vartheta(X)$?

c) Untersuchen Sie, ob

$$\begin{aligned}
T_n(X_1, \ldots, X_n) &:= X_1 - \overline{X}_n, \\
U_n(X_1, \ldots, X_n) &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2,
\end{aligned}$$

erwartungstreue Schätzer für $\tau(\vartheta) := V_\vartheta(X)$ sind, falls auch $V_\vartheta(X)$ für alle $\vartheta \in \Theta$ existiert.

d) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ $\text{Bin}(1, p)$-verteilte Zufallsgrössen. Untersuchen Sie, ob

$$\begin{aligned}
T_n(X_1, \ldots, X_n) &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \\
U_n(X_1, \ldots, X_n) &:= \frac{1}{n + \sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{n}}{4} + \sum_{i=1}^{n} X_i \right),
\end{aligned}$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\vartheta) := p$ sind. Was beobachten Sie für den Spezialfall $p = \frac{1}{2}$?

Aufgabe 4 (mittlere Abweichung versus Varianz | 4 Punkte)**.**

Sei X eine Zufallsgrösse mit $E(X^2) < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$E(X^2) \geq \big(E(X)\big)^2$$

und schliessen Sie damit, dass

$$\sqrt{V(X)} \geq E\big(|X - E(X)|\big) =: e_X.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $x^2 \geq 2yx - y^2$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt, und starten Sie dann mit*

$$X^2 \geq 2E(X)X - \big(E(X)\big)^2.$$