Übungsblatt 8.

Abgabe bis: **Freitag, 16.11.2018, 12:00 Uhr**

Aufgabe 1 (lineare Kongruenzgeneratoren | 4 Punkte).

a) Überprüfen Sie, ob der lineare Kongruenzgenerator mit den Parametern

(i) $m = 9973$, $a = 3432$ und $b = 6789$ eine maximale Periode hat.

(ii) $m = 2048$, $a = 1229$ und $b = 1$ eine maximale Periode hat.

b) Betrachten Sie den linearen Kongruenzgenerator mit den Parametern $m = 64$, $a = 7$ und $b = 6$. Geben Sie Startwerte z_0 an, so dass die resultierenden Folgen Periodenlängen von 1, 2 und 8 haben.

Aufgabe 2 (RANDU | 4 Punkte).

Der lineare Kongruenzgenerator RANDU ist durch die Parameter $m = 2^{31}$, $a = 2^{16} + 3$ und $b = 0$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die z_j der folgenden Aussage genügen:

$$z_{j+2} - 6z_{j+1} + 9z_j \in 2^{31}\mathbb{Z}.$$

b) Um Zufallspunkte in $[0, 1]$ zu erhalten, setzen wir $u_j := z_j/2^{31}$. Wir definieren nun die Punkte p_j und die Ebenen l_i durch

$$p_j := (u_j, u_{j+1}, u_{j+2})$$
$$l_i := \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 9x_1 - 6x_2 + x_3 = i\big\},$$

für $j \in \mathbb{N}$ ein $i \in \mathbb{Z}$.

Zeigen Sie, dass für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein $i_j \in \mathbb{Z}$ existiert mit $p_j \in l_{i_j}$, d.h. die Punkte p_j liegen auf den Ebenen l_i.

c) Wie gross ist der Abstand zwischen den Ebenen l_i und l_{i+1}?

d) Wie viele der Ebenen l_i schneiden den Einheitswürfel $[0, 1]^3$?

Aufgabe 3 (Abstand von Zufallszahlen | 1 Punkt).

Betrachten Sie einen linearen Kongruenzgenerator

$$z_{j+1} := (az_j + b) \mod m$$

mit $a, b, m \in \mathbb{N}$ und Startwert $z_0 < m - 1$. Zeigen Sie per Induktion über j:

$$z_{j+k} - z_j \mod m = a^j(z_k - z_0) \mod m, \qquad j, k \geq 0.$$

Aufgabe 4 (Bedingte Verteilung | 3 Punkte).

a) Für stetige Zufallsgrössen X, Y definieren wir

$$P(X \leq x | Y = y) := \lim_{h \searrow 0} P(X \leq x | y \leq Y \leq y + h).$$

Überprüfen Sie mit dieser Definition, dass für zwei auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsgrössen X, Y und einer Dichtefunktion $g(x)$ auf $[0,1]$ mit Verteilungsfunktion $G(x)$ dann tatsächlich

$$P(Y \leq g(X) | X = x) = g(x)$$

gilt.

Hinweis: Für zwei auf $[0,1]$ *gleichverteilte Zufallsgrössen* X, Y *ist*

$$P((a \leq X \leq b) \cap (c \leq Y \leq d)) := \int_a^b \int_c^d 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Überlegen Sie sich mit Hilfe dieser Definition, wie der Ausruck

$$P((Y \leq g(X)) \cap (x \leq X \leq x + h))$$

aussieht.

b) Seien X, Y und g wie oben. Überpüfen Sie mithilfe von Riemann-Summen die folgende Gleichung aus der Vorlesung:

$$P(Y \leq g(X)) = \int_0^1 P(Y \leq g(X) | X = x) \, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 5 (Erwartungswerte von Summen zweier Zufallsgrössen | 4 Punkte).

Gegeben seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und zwei stetige Zufallsgrössen X, Y, deren Erwartungswerte existieren. Zeigen Sie, dass dann auch der Erwartungswert der Zufallsgrösse $Z := X + Y$ existiert und $E(Z) = E(X) + E(Y)$ gilt.
Hinweis: Definieren Sie dazu für $n \in \mathbb{N}$ *die diskreten Zufallsgrössen* X_n, Y_n *und* Z_n *durch*

$$\begin{aligned} X_n(\omega) &= k/n \text{ genau dann, wenn } X(\omega) \in \big[k/n, (k+1)/n\big), \\ Y_n(\omega) &= k/n \text{ genau dann, wenn } Y(\omega) \in \big[k/n, (k+1)/n\big), \\ Z_n(\omega) &= k/n \text{ genau dann, wenn } Z(\omega) \in \big[k/n, (k+1)/n\big) \end{aligned}$$

und zeigen Sie dann

$$X_n(\omega) + Y_n(\omega) \leq Z_n(\omega) \leq X_n(\omega) + Y_n(\omega) + 1/n.$$

Mit diesen Schranken können Sie nun einerseits zeigen, dass der Erwartungswert von Z *existiert und dass* $E(Z) = E(X) + E(Y)$ *gilt, vergleiche den Anfang von Kapitel 4.2 der Vorlesung.*