



## Übungsblatt 7.

Abgabe bis: **Freitag, 9. November 2018, 12 Uhr**

### Aufgabe 1 (Normalverteilung I | 4 Punkte).

Berechnen Sie:

- $P(|X| < 1.5)$ , falls  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt ist,
- $P(-5 \leq X < 2)$ , falls  $X \sim \mathcal{N}(1, 9)$ -verteilt ist,
- $\sigma^2$ , falls  $X \sim \mathcal{N}(2, \sigma^2)$ -verteilt ist und  $P(0 < X < 4) = 0.6826$  gilt,
- $\mu$ , falls  $X \sim \mathcal{N}(\mu, 16)$ -verteilt ist und  $P(X < 7) = 0.3265$  gilt.

### Aufgabe 2 (Normalverteilung II | 4 Punkte).

Die Länge einer Schraube sei bei einer bestimmten Maschineneinstellung eine normalverteilte Zufallsgrösse mit Mittelwert  $\mu = 75$  mm und der Standardabweichung  $\sigma = 0.5$  mm. Eine Schraube mit einer Länge kleiner als 74 mm ist Ausschuss. Ist die Länge grösser als 75.5 mm, dann muss die Schraube nachgearbeitet werden.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Schraube Ausschuss ist.
- Es werden 150 Schrauben produziert. Wie viele Schrauben lassen sich im Mittel sofort verwenden?
- Um welchen Wert wäre die Maschineneinstellung zu korrigieren, damit nicht mehr als 1% der Schrauben Ausschuss sind?

### Aufgabe 3 (Cauchy-Verteilung | 4 Punkte).

Sei  $C > 0$  sowie  $f(x) = C/(1+x^2)$ . Bestimmen Sie die Konstante  $C$  derart, dass  $f$  die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgrösse  $X$  ist. Bestimmen Sie ausserdem die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert, sowie die Varianz von  $X$ .

*Hinweis: Es gilt  $(\arctan(x))' = 1/(1+x^2)$ . Um den Erwartungswert zu berechnen, ist es hilfreich, auch  $E(|X|)$  zu betrachten.*

### Aufgabe 4 (Exponentialverteilung | 4 Punkte).

Eine stetige Zufallsgrösse  $X$  mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

heisst *exponentialverteilt* mit dem Parameter  $\lambda > 0$ , kurz  $X \sim \text{Ex}(\lambda)$ . Es sind dann

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{und} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

- a) Für  $i = 1, \dots, n$  seien  $\lambda_i > 0$  und  $X_i$  stochastisch unabhängige Zufallsgrößen mit  $X_i \sim \text{Ex}(\lambda_i)$ . Wir definieren weiter  $Y := \min_{i=1}^n (X_i)$ . Zeigen Sie dann, dass  $Y \sim \text{Ex}(\lambda)$ -verteilt ist, wo  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  ist.

*Hinweis: Beachten Sie, dass  $P(Y > a) = P(X_1 > a, \dots, X_n > a)$ .*

- b) Ein Gerätesystem bestehe aus drei Teilgeräten. Von den Herstellern der Teilgeräte werde angegeben, dass deren Lebensdauer jeweils exponentialverteilt sei mit einer mittleren Lebensdauer von 2, 3 bzw. 5 Jahren. Die Lebensdauer der Teilgeräte sei stochastisch unabhängig.
- (i) Bestimmen Sie die mittlere Lebensdauer des Gesamtsystems (Zeit bis zum ersten Ausfall eines Teilsystems).
- (ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht das Gesamtsystem eine Mindestlebensdauer von 15 Monaten?

### Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\Phi(z) := P(Z \leq z), \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z).$$

+	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990