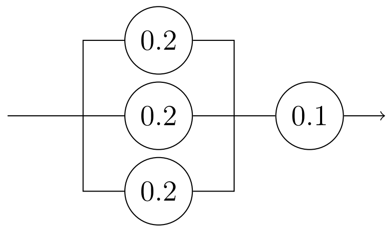
Übungsblatt 4.

zu bearbeiten bis: **Freitag, 19.10.2018, 12:00 Uhr.**

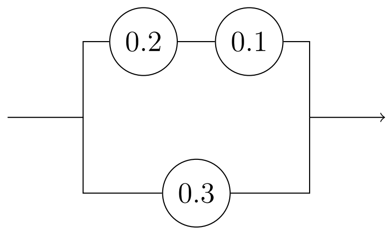
Aufgabe 1 (Unabhängigkeit I | 4 Punkte)**.**

Die nachfolgenden Schaltungen a) – c) beschreiben Fertigungssysteme, die bei der Herstellung eines bestimmten Erzeugnisses von links nach rechts zu durchlaufen sind. Die Zahlen in den Kreisen beschreiben die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Teil des Systems an einem Tag ausfällt (dieser Teil kann dann für den Rest des Tages nichts mehr produzieren). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Erzeugnisstrom an einem Tag vollständig zum Erliegen kommt.

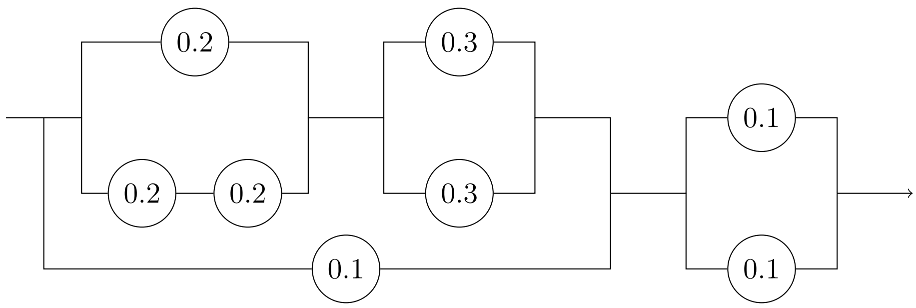
a)



b)



c)



Aufgabe 2 (Unabhängigkeit II | 6 Punkte).

a) Seien die Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ stochastisch unabhängig (gemäss Definition 2.10). Zeigen Sie, dass dann $\emptyset, A, B, \Omega$ auch vollständig stochastisch unabhängig sind (gemäss Definition 2.12).

b) Seien die Ereignisse $A_1, \dots A_n \in \mathcal{A}$ vollständig stochastisch unabhängig. Seien weiter $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ so, dass $A_i = A_j$ ist. Zeigen Sie, dass dann $P(A_i) \in \{0, 1\}$ gilt.

c) Seien die Ereignisse $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ vollständig stochastisch unabhängig. Seien weiter $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass dann die Ereignisse $B_1, \dots, B_n$ auch vollständig stochastisch unabhängig sind.

d) Seien die Ereignisse $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ vollständig stochastisch unabhängig mit $n > 2$. Zeigen Sie, dass die Ereignisse $A_1 \cap A_2, A_3 \dots, A_n$ ebenfalls vollständig stochastisch unabhängig sind. Schliessen Sie weiter mit c), dass auch die Ereignisse $A_1 \cup A_2, A_3 \dots, A_n$ vollständig stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 3 (Zufallsgrössen I | 3 Punkte).

Es sei X eine diskrete Zufallsgrösse mit dem Wertebereich $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$ und der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(x) = (x + 1) \cdot c \quad \text{für } x \in \mathcal{X}.$$

a) Bestimmen Sie den Wert der Konstanten c.

b) Ermitteln Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X < 2), \quad P(X \leq 2) \quad \text{und} \quad P(0 < X < 2).$$

c) Bestimmen Sie den kleinsten Wert von x, für den $P(X \leq x) > 0.5$ gilt.

Aufgabe 4 (Zufallsgrössen II | 3 Punkte).

Eine Studentin habe auf ihrem Weg zur Universität vier voneinander unabhängig und zufällig geregelte Ampelkreuzungen zu überqueren. Es bezeichne X die Anzahl überquerten Kreuzungen bis zum erstmaligen Halt der Studentin wegen einer roten Ampel oder dem Erreichen der Universität.

Die Wahrscheinlichkeiten, dass die Ampeln grün haben, sei jeweils 0.5.

a) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ an, der die Zustände der vier Ampeln (bezüglich der Studentin) modelliert.

b) Definieren Sie die Zufallsgrösse X, die oben sprachlich gegeben ist, formal als Abbildung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie dafür auch, dass ihre Abbildung X die Eigenschaft

$$\big\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\big\} \in \mathcal{A},$$

für alle Intervalle I der reellen Achse, besitzt.

c) Bestimmen Sie den Wertebereich und die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X. Berechnen Sie dann mit Hilfe der Zufallsgrösse X die Wahrscheinlichkeit, dass die Studentin die Universität erreicht, ohne vor den Ampeln anhalten zu müssen.