Übungsblatt 9.

zu bearbeiten bis **Montag, 5.5.2014, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (Analytische Fortsetzung in das Komplexe)

Gegeben sei eine analytische Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass der Konvergenzradius eine stetige Funktion ist, deren Minimum auf $[-1, 1]$ durch $\rho - 1 > 0$ gegeben ist. Zeigen Sie dann, dass sich die Funktion f analytisch auf eine *Bernstein-Ellipse* E_ρ ausdehnen lässt. Diese ist definiert durch

$$E_\rho = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\operatorname{Re}(z)}{a_\rho^2} + \frac{\operatorname{Im}(z)}{b_\rho^2} \leq 1 \right\}.$$

Hierbei sind die Halbachsen des *elliptischen Radius* gegeben durch

$$a_\rho = \frac{\rho + \rho^{-1}}{2} \quad \text{und} \quad b_\rho = \frac{\rho - \rho^{-1}}{2}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Tschebyscheff-Entwicklung)

Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine analytische Funktion. Die Tschebyscheff-Entwicklung der Funktion f mit den Tschebyscheff-Polynomen T_k für $k = 0, 1, \ldots$ hat die Gestalt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x) \quad \text{mit geeigneten Koeffizienten } a_k \in \mathbb{R}.$$

Diese Entwicklung ist äquivalent zu der Laurent-Entwicklung

$$F(z) = F(z^{-1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(z^k + z^{-k} \right) = f\left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)$$

von f auf dem Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Zeigen Sie, dass die Entwicklungskoeffizienten der Tschebyscheff-Entwicklung gegeben sind durch

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x,$$

wobei die Tschebyscheff-Polynome für $k \geq 1$ folgender Drei-Term-Rekursion genügen:

$$T_{k+1}(x) = 2x T_k(x) - T_{k-1}(x) \quad \text{mit} \quad T_{-1}(x) = 0 \text{ und } T_0(x) = 1.$$

Hinweis. Verwenden Sie, dass für die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten der Laurent-Reihe einer auf dem Einheitskreis analytischen Funktion G gilt

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k \quad \text{mit} \quad b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{G(z)}{z^{1+k}} \, \mathrm{d}z.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Abklingen der Tschebyscheff-Koeffizienten)

Eine analytische Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ sei analytisch ausdehnbar auf die Bernstein-Ellipse E_ρ mit $\rho > 1$. Dann erfüllen die Koeffizienten der Tschebyscheff-Reihe mit $M := \sup_{x \in E_\rho} |f(x)|$ die Abschätzung

$$|a_0| \leq M \quad \text{und} \quad |a_k| \leq 2M\rho^{-k} \quad \text{für } k \geq 1.$$

Hinweis. Durch die Transformation $x = (z + z^{-1})/2$ wird die Bernstein-Ellipse E_ρ auf das Ringgebiet $\rho^{-1} \leq |z| \leq \rho$ abgebildet. Jedem $x \in E_\rho$ werden hierbei die zwei Werte z und z^{-1} zugewiesen, die der Transformationsgleichung genügen. Speziell wird der Rand der Ellipse dem Kreis mit Radius ρ^{-1} und dem mit Radius ρ zugewiesen. Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(z) = f((z + z^{-1})/2)$ analytisch auf dem Ringgebiet ist und verwenden Sie dann die Darstellung der Koeffizienten der Laurent-Reihe.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Approximation durch Tschebyscheff-Polynome)

Zeigen Sie, dass die Tschebyscheff-Polynome gegeben sind durch $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ und folglich $\|T_k\|_{L^\infty([-1,1])} = 1$ gilt. Folgern Sie unter den Vorraussetzungen von Aufgabe 3, dass die abgeschnittene Tschebyscheff-Entwicklung

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x)$$

der Abschätzung

$$\|f - f_n\|_{L^\infty([-1,1])} \leq \frac{2M\rho^{-n}}{\rho - 1}$$

genügt, also uniform gegen f mit exponentieller Rate konvergiert.

(4 Punkte)