UNIVERSITÄT BASEL

Numerik stochastischer Differentialgleichungen

Frühjahrssemester 2014
Prof. Dr. H. Harbrecht

UNI BASEL

Übungsblatt 8.

zu bearbeiten bis **Montag, 28.4.2014, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (Min-Max-Prinzip von Courant-Fischer)

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Das *Min-Max-Prinzip* von Courant-Fischer für Matrizen besagt, dass für die Eigenwerte $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ von $\mathbf{A}$ und beliebige m-dimensionale Unterräume $U_m \subset \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\min_{0\neq \mathbf{x}\in U_m} \frac{\mathbf{x}^\intercal \mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\intercal \mathbf{x}} \leq \lambda_m \quad \text{und} \quad \max_{0\neq \mathbf{x}\in U_m^\perp} \frac{\mathbf{x}^\intercal \mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\intercal \mathbf{x}} \geq \lambda_{m+1}.$$

Die Ungleichungen gelten genau dann mit Gleichheit, wenn der Unterraum U_m von den Eigenvektoren zu $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ aufgespannt wird. Weisen Sie anhand eines Gegenbeispiels nach, dass im Min-Max-Prinzip von Courant-Fischer nicht auf die Symmetrie der Matrix verzichtet werden kann.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Optimalität der Singulärwertzerlegung in der Spektralnorm)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $m \geq n$. Wir bezeichnen mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$ und mit $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ die zugehörigen orthonormalen Eigenvektoren. Die Singulärwertzerlegung von $\mathbf{A}$ ist gegeben durch

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\intercal \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

wobei $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sigma_n = \sqrt{\lambda_n}$ und die Matrizen $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ orthogonale Matrizen sind. Wegen $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^\intercal\mathbf{U}^\intercal$ und $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^\intercal\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\intercal$ sind die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ orthonormale Eigenvektoren von $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m$, die mit den Vektoren $\mathbf{v}_{n+1}, \ldots, \mathbf{v}_m$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^m$ vervollständigt werden.
Zeigen sie, dass die nach $r \leq n$ Termen abgeschnittene Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}_r\mathbf{V}^\intercal \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\Sigma}_r = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

die Gleichung

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_r\|_2 = \sigma_{r+1}$$

erfüllt und eine optimale Approximation unter allen $n \times m$-Matrizen vom Rang r im Sinne der Spektralnorm $\|\cdot\|_2$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Optimalität der Singulärwertzerlegung in der Frobenius-Norm)

Wir betrachten wiederum die Singulärwertzerlegung von $\mathbf{A}$ aus Aufgabe 2. Wir beweisen die Optimalität der abgeschnittenen Singulärwertzerlegung $\mathbf{A}_r$ in drei Schritten.

a) Für die Frobenius-Norm gilt die Gleichung

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_r\|_F^2 = \sum_{k=r+1}^{n} \sigma_k^2.$$

b) Ist $\mathbf{B}$ eine $m \times n$-Matrix mit $\operatorname{rank}(\mathbf{B}) \leq r$, so erfüllen die absteigend geordneten Singulärwerte von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ die Abschätzung

$$\sigma_i(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \geq \sigma_{i+r}(\mathbf{A}).$$

c) Die abgeschnittene Singulärwertzerlegung minimiert den Ausdruck

$$\mathbf{A}_r = \operatorname*{argmin}_{\mathbf{B}} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_F$$

unter allen $n \times m$-Matrizen $\mathbf{B}$ vom Rang r.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Abklingen der Eigenwerte)

Sei $k \in H^p(D \times D)$ und $D \subset \mathbb{R}^n$ ein hinreichend glattes Gebiet. Zeigen Sie, dass der zum Kern k gehörige Hilbert-Schmidt-Operator K von $L^2(D) \to H^p(D)$ abbildet. Aus dem Bramble-Hilbert-Lemmas folgt, dass es einen m-dimensionalen Unterraum $V_m \subset L^2(D)$ gibt, so dass für die orthogonale L^2-Projektion $P_m : L^2(D) \to V_m$ und Funktionen $u \in H^p(D)$ die fehlerabschätzung

$$\|(\operatorname{Id} - P_m)u\|_{L^2(D)} \leq c m^{-p/n} \|u\|_{H^p(D)}.$$

gilt. Weisen sie damit nach, dass die Eigenwerte von K das Abklingverhalten $\lambda_{m+1} \leq c m^{-p/n}$ erfüllen.

Hinweis. Verwenden Sie das Min-Max-Prinzip von Courant-Fischer.

(4 Punkte)