Übungsblatt 7.

zu bearbeiten bis **Montag, 14.4.2014, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (Kompaktheit von Hilbert-Schmidt-Operatoren)

Seien $K : L^2(D) \to L^2(D)$ ein stetiger Operator und $\{u_n\}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(D)$. Zeige, dass der Operator $K_n : L^2(D) \to L^2(D)$, definiert durch

$$K_n v = \sum_{j=1}^{n} (v, u_j)_{L^2(D)} K u_j,$$

kompakt ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Karhunen-Loève-Entwicklung)

Seien $D = (-1, 1)$ und $a \in L^2(\Omega; L^2(D))$ beschrieben durch das Erwartungsfeld $\mathbb{E}_a(x)$ und den Korrelationskern $k(x, y) = e^{-c|x-y|}$. Der zugehörige Kovarianzoperator ist somit gegeben durch

$$(K\phi)(x) := \int_D k(x, y)\phi(y)\,\mathrm{d}y.$$

Bestimmen Sie die Eigenpaare von K und stellen Sie die Karhunen-Loève-Entwicklung von a auf.

Hinweis Zeigen Sie zunächst, dass ein Eigenpaar (λ, ϕ) von K eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{gathered} \phi''(x) + b^2\phi(x) = 0 \quad -1 \le x \le 1, \\ c\phi(-1) = \phi'(-1), \quad -c\phi(1) = \phi'(1), \end{gathered}$$

mit $b = \sqrt{\frac{2c - c^2\lambda}{\lambda}}$ ist. Die Lösungen dieser Gleichungen sind allgemein bekannt und gegeben durch

$$\phi(x) = c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(bx).$$

Bestimmen Sie die Konstanten c_1 und c_2 und zeigen Sie, dass es nur dann nichttriviale Lösungen der Differentialgleichung gibt, wenn $c = b\tan(b)$ oder $-c = b\tan(b)$ gilt. Die Lösungen der ersten Gleichung bezeichnen wir mit $\{b_n\}$ und die von der zweiten Gleichung mit $\{b'_n\}$. Weisen Sie nach, dass die zugehörigen, normierten Funktionen ϕ_n bzw. $\phi_{n'}$ gegeben sind durch

$$\phi_n(x) = \frac{\cos(b_n x)}{\sqrt{1 + \frac{\sin(2b_n)}{2b_n}}} \quad \text{bzw.} \quad \phi_{n'}(x) = \frac{\sin(b'_n x)}{\sqrt{1 - \frac{\sin(2b'_n)}{2b'_n}}}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Korrelationskerne)

Wir betrachten das Gebiet $D = (0, 1)$ und das stochastische Feld $a(t, \omega) \in L^2(D \times \Omega)$. Das Feld sei charakterisiert durch die Erwartungsfunktion $\mathbb{E}_a(t) = 0$ für $t \in (0, 1)$ und den Korrelationskern $k(s, t)$. Zeigen Sie, dass der zum Korrelationskern $k(s, t) = \cos(2\pi(t - s))$ assozierte Kovarianzoperator positiv semidefinit, symmetrisch und kompakt ist. Bestimmen Sie danach die Karhunen-Loève-Entwicklung von a.

Hinweis. Die Verteilung der in der Karhunen-Loève-Entwicklung auftretenden Zufallsvariablen spielt für die Berechnung der Entwicklung keine Rolle. Die Zufallsvariablen dürfen aber als gleichverteilt auf $[-1, 1]$ aufgefasst werden.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Brownsche Brücke)

Ein stochastisches Feld wird *stochastischer Prozess* genannt, falls das zugrundeliegende örtliche Gebiet eindimensional ist und mit einem Zeitintervall assoziiert wird. Einer der bekanntesten stochastischen Prozesse ist die *Brownsche Brücke* $B : [0, 1] \times \Omega \to \mathbb{R}$. Sie ist gekennzeichnet durch die Erwartungsfunktion $\mathbb{E}_B(t) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$, die Kovarianzfunktion $k(s, t) = \min\{s, t\} - st$ und durch Gaußsche Zufallsvariablen in der Karhunen-Loève-Entwicklung. Bestimmen Sie die explizite Darstellung der Brownschen Brücke.

(4 Punkte)