UNIVERSITÄT BASEL

Numerik stochastischer Differentialgleichungen

Frühjahrssemester 2014
Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 2. zu bearbeiten bis **Montag, 3.3.2014, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (Markov-Ungleichung)

Sei $X \in L_P^p(\Omega)$ eine Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ die *Markov-Ungleichung* gilt

$$P(|X| \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha^p} \mathbb{E}\big(|X|^p\big).$$

Weisen Sie nach, dass die Tschebyscheff-Ungleichung ein Spezialfall der Markov-Ungleichung ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Jensen-Ungleichung)

Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und X eine reelwertige Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zudem seien X und $\phi \circ X \in L_P^1(\Omega)$. Zeigen Sie die *Jensen-Ungleichung*

$$\phi\big(\mathbb{E}(X)\big) \leq \mathbb{E}(\phi \circ X).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Lebesgue-Bochner-Räume)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X ein Banach-Raum. Der *Bochner-Raum* $L_P^q(\Omega; X)$ mit $q \in \mathbb{N}$ ist die Menge aller messbaren Funktionen $f : \Omega \to X$, die beschränkt sind bezüglich der Norm

$$\|f\|_{L_P^q(\Omega;X)} := \left(\int_\Omega \|f(w)\|_X^q \, \mathrm{d}P(\omega) \right)^{1/q}.$$

Für $f \in L_P^q(\Omega; X)$ und $g \in L_P^p(\Omega; X)$ mit $1/p + 1/q = 1$ gilt die *Hölder-Ungleichung*

$$\|fg\|_{L_P^1(\Omega;X)} \leq \|f\|_{L_P^q(\Omega;X)} \|g\|_{L_P^p(\Omega;X)}.$$

Zeigen Sie, dass für $f, g \in L_P^q(\Omega; X)$ die *Minkowski-Ungleichung*

$$\|f + g\|_{L_P^q(\Omega;X)} \leq \|f\|_{L_P^q(\Omega;X)} + \|g\|_{L_P^q(\Omega;X)}$$

erfüllt ist.

Hinweis. Verwenden Sie im Fall $q > 1$ die Hölder-Ungleichung.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Tensorprodukte)

Seien X, Y Banach-Räume über $\mathbb{R}$ mit zugehörigen Dualräumen X', Y'. Wir definieren den formalen Ausdruck $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ mit $x_i \in X$ sowie $y_i \in Y$ für $n \in \mathbb{N}$ und fassen ihn auf als linearen Operator $A\colon X' \to Y$ gegeben durch

$$A\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) y_i \quad \text{für alle } \varphi \in X'.$$

Wir setzen

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \sim \sum_{i=1}^m a_i \otimes b_i,$$

falls diese beiden Ausdrücke den selben Operator definieren. Die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ bezeichnen wir als $X \otimes Y$. Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die skalare Multiplikation

$$\alpha \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i) \otimes y_i$$

und die Addition

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i + \sum_{i=n+1}^m x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^m x_i \otimes y_i.$$

Bezüglich dieser Operationen ist $X \otimes Y$ ein Vektorraum. Man bezeichnet diesen Raum als *algebraisches Tensorprodukt.*

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{aligned} x \otimes (u+v) &= x \otimes u + x \otimes v, \\ (\alpha x) \otimes y &= x \otimes (\alpha y), \\ x \otimes 0 &= 0 \otimes 0. \end{aligned}$$

(4 Punkte)