UNIVERSITÄT BASEL

Numerik stochastischer Differentialgleichungen

Frühjahrssemester 2014
Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 10. zu bearbeiten bis **Montag, 12.5.2014, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (Ehrlingsches Lemma)

Es seien X, Y und Z Banach-Räume mit den Normen $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ und $\|\cdot\|_Z$. Zudem sei $K : X \to Y$ ein kompakter Operator und $T : Y \to Z$ ein stetiger, injektiver Operator. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C = C(\varepsilon) < \infty$, so dass für alle $x \in X$ gilt

$$\|Kx\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X + C\|T(Kx)\|_Z.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Spurnorm)

Sei $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische und positiv semidefinite Matrix, das heisst $\mathbf{x}^\intercal \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die *Spurnorm* $\|\mathbf{A}\|_{\mathrm{tr}} := \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ die folgenden drei Normeigenschaften auf der Menge der positiv semidefiniten Matrizen erfüllt:

1. Definitheit: $\|\mathbf{A}\|_{\mathrm{tr}} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = 0$.
2. Homogenität: $\|\alpha\mathbf{A}\|_{\mathrm{tr}} = \alpha\|\mathbf{A}\|_{\mathrm{tr}}$ für alle $\alpha \geq 0$.
3. Dreiecksungleichung: $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|_{\mathrm{tr}} \leq \|\mathbf{A}\|_{\mathrm{tr}} + \|\mathbf{B}\|_{\mathrm{tr}}$.

Hinweis. Weisen Sie zunächst nach, dass $|a_{i,j}| \leq \sqrt{a_{i,i}a_{j,j}}$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (pivotisierte Cholesky-Zerlegung)

Das stochastische Feld $a(\mathbf{x}, \omega)$ sei näherungsweise gegeben durch die Finite-Element-Approximation $a_h(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\big(\overline{\mathbf{a}}_h + \mathbf{L}\mathbf{Y}(\omega)\big)$. Hierbei seien $\mathbf{Y}(\omega) = [Y_k(\omega)]_{k=1}^n$ unkorrelierte, zentrierte Zufallsgrössen mit Varianz 1, $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = [\phi_1(\mathbf{x}), \ldots, \phi_n(\mathbf{x})]$ eine L^2-orthonormale Basis des Finite-Element-Raums V_h und $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ derart, dass der zugehörige Kovarianzkern die Darstellung

$$k_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i,j=1}^n (k, \phi_i \otimes \phi_j)_{L^2(D\times D)}\phi_i(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{y}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\mathbf{L}\mathbf{L}^\intercal\mathbf{\Phi}(\mathbf{y})^\intercal$$

hat. Hierbei entspreche $\mathbf{L}\mathbf{L}^\intercal$ der vollständigen pivotisierten Cholesky-Zerlegung der Koeffizientenmatrix $\big[(k, \phi_i \otimes \phi_j)_{L^2(D\times D)}\big]_{i,j=1}^n$ von $k_h \in V_h \otimes V_h$ bezüglich der Basis $\mathbf{\Phi}$.

Sei nun $\mathbf{L}_m\mathbf{L}_m^\intercal$ die abgebrochene pivotisierte Cholesky-Zerlegung mit

$$\|\mathbf{L}\mathbf{L}^\intercal - \mathbf{L}_m\mathbf{L}_m^\intercal\|_{\mathrm{tr}} \leq \varepsilon$$

für ein $\varepsilon > 0$ und $m \leq n$. Zeigen Sie, dass dann für die Approximation $a_{h,m}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})(\overline{\mathbf{a}}_h + \mathbf{L}_m[Y(\omega)]_{k=1}^m)$ gilt

$$\|a_h(\mathbf{x}, \omega) - a_{h,m}(\mathbf{x}, \omega)\|_{L^2(D)\otimes L^2_{\mathbb{P}}(\Omega)} \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Kahan-Matrix)

Gegeben sei die *Kahan-Matrix*

$$\mathbf{K}_n(\theta) = [k_{i,j}]_{i,j=1}^n = \operatorname{diag}(1, s, s^2, \dots, s^{n-1}) \begin{bmatrix} 1 & -c & \cdots & -c \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -c \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit $c = \cos(\theta)$, $s = \sin(\theta)$ und $0 < \theta < \pi/2$. Zeigen Sie, dass die Inverse dieser Matrix gegeben ist durch die obere Dreiecksmatrix $\mathbf{K}_n^{-1} = [r_{i,j}]_{i,j=1}^n$ mit

$$r_{i,j} = \begin{cases} s^{1-j}, & i = j \\ s^{1-j} c (c+1)^{j-i-1}, & i < j. \end{cases}$$

Folgern Sie hieraus, dass gilt

$$s^{n-1}\mathbf{K}_n(\theta)^{-1} \xrightarrow{\theta \to 0} [\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{x}] \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = [2^{n-2}, 2^{n-3}, \dots, 2^{n-n}, 1]^\mathsf{T}$$

und weiter für die Spektralnorm

$$|k_{n,n}| \left\| \mathbf{K}_n^{-1} \right\|_2 \xrightarrow{\theta \to 0} \sqrt{\frac{4^{n-1} + 2}{3}}.$$

(4 Punkte)