UNIVERSITÄT BASEL

Numerik stochastischer Differentialgleichungen

Frühjahrssemester 2014
Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 1.

zu bearbeiten bis **Montag, 24.2.2013, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (Sigma-Algebra)

Sei Ω eine Menge und $\mathcal{P}(\Omega)$ ihre Potenzmenge. Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heisst *Algebra*, falls die folgenden drei Eigenschaften gelten:

- $\Omega \in \mathcal{U}$.
- Für $A \in \mathcal{U}$ ist auch $A^c \in \mathcal{U}$.
- Für $A, B \in \mathcal{U}$ ist auch $A \cup B \in \mathcal{U}$.

Zeigen Sie, dass für die Menge $\mathcal{U} := \{A \subset \Omega : A \text{ ist endlich oder } A^c \text{ ist endlich}\}$ gilt:

a) $\mathcal{U}$ ist eine Algebra.

b) $\mathcal{U}$ ist genau dann eine σ-Algebra, falls Ω endlich ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Varianz unkorrelierter Zufallsvariablen)

Gegeben seien paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$. Paarweise unkorreliert bedeutet, dass $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = 0$ für $i \neq j$ gilt. Zeigen Sie die Gleichheit von *Bienaymé*

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Momente normalverteilter Zufallsvariablen)

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Zeigen Sie, dass die zentrierten Momente

$$\mathcal{M}_Z^k(X) := \mathbb{E}\big[(X-\mu)^k\big]$$

gegeben sind durch

$$\mathcal{M}_Z^k(X) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } k \text{ ungerade} \\ (n-1)!!\sigma^k & \text{, falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Hierbei ist die Doppelfakultät für ungerades k gegeben durch

$$k!! = k \cdot (k-2) \cdots 3 \cdot 1.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Vorbereitung auf die WM 2014)

Ein Finalspiel im Fußball zwischen der Schweiz und Deutschland muss nach Verlängerung im Penalty-Schiessen entschieden werden. Nehmen Sie an, dass die einzelnen Schüsse voneinander unabhängig sind und die deutschen Schützen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.6 treffen, während die schweizer Schützen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.8 ein Tor erzielen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es nach zehn Schüssen zu einer Entscheidung kommt?

(4 Punkte)