Serie 11

Newton-Verfahren

Hinweis: Die Abgabe von Serie 11 hat zwingend in der Woche 11 zu erfolgen (also dieselbe Woche, in der Serie 10 spätestens abgegeben werden muss). In der Woche 12 findet ausser der Klausur kein Praktikum mehr statt.

Aufgabe 11.1 (1 Punkt)**:** Lies die Beilage sorgfältig durch und beantworte folgende Fragen:

a) Wofür wird das Newton-Verfahren genutzt?

b) Wie lässt sich eine Iterationsvorschrift formulieren, um Extrempunkte einer Funktion zu bestimmen?

   Hinweis: Extrempunkte einer Funktion f entsprechen Nullstellen der Ableitung f'. Verwende dann die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens.

Aufgabe 11.2 ($2+2+1$ Punkte)**:** Die komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch $f(z) = z^6 - 1$, hat genau sechs Nullstellen:

$$\pm 1 \quad \text{und} \quad \pm\frac{1}{2} \pm i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Bei der Bestimmung einer dieser sechs Nullstellen mit dem Newton-Verfahren gehen wir genau wie im reellen Fall vor, d.h. wir betrachten die Iteration

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Wir wollen nun das Verhalten der Folge $\{z_k\}_{k \geq 0}$ für verschiedene Anfangswerte $z_0 \in \mathbb{C}$ studieren, insbesondere deren Einfluss auf den Grenzwert.

a) Schreibe eine MATLAB-Funktion

   `z = newton50(f, df, z0),`

   welche die ersten 50 Werte der Newton-Iteration berechnet. Die Funktion f und ihre Ableitung f' sollen als function-handles übergeben werden (`f` und `df`), der Startpunkt `z0` ist eine beliebige komplexe Zahl und der Output `z` ist der komplexe Vektor, welche die ersten 50 Newton-Iterationen enthält.

   Beispiel: Für `z0` = `z(1)` $= -1.5 + i1.5$ ist `z(50)` $\approx -0.5 + i0.866$.

b) Das MATLAB-Skript `example.m` von der Webseite illustriert die Verwendung des Befehls `ginput(1)`. Schreibe damit ein MATLAB-Skript, das die ersten 50 Werte zusammmen mit den sechs Nullstellen in eine Grafik zeichnet. Dabei soll der Anfangswert `z0` vom Benutzer mit einem Mausklick vorgegeben werden und die 50 Iterationen sollen mittels `newton50` berechnet werden. Du kannst dich von Abbildung 1 inspirieren lassen.

c) Versuche durch Ausprobieren Bereiche der komplexen Ebene zu bestimmen, bei denen du mit Sicherheit voraussagen kannst, gegen welche der sechs Nulstellen die Folge z_k konvergieren wird. Wie sieht es in der Nähe des Ursprungs aus?

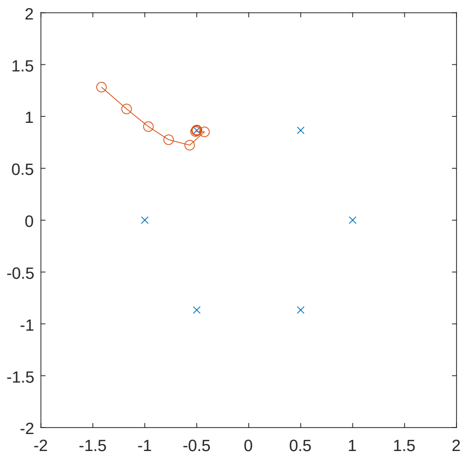

Abbildung 1: Visualisierung der ersten 50 Iterationsschritte.

Aufgabe 11.3 (2 + 2 Punkte)**:**

a) Schreibe deine Funktion `newton50` zu einer neuen Funktion `newton` um, sodass nur noch der letzte Wert `z(50)` ausgegeben wird. Dabei sollen die alten Werte der Iteration von den neuen überschrieben und nicht wie vorher gespeichert werden. Ausserdem sollen gleich mehrere Startwerte gleichzeitig bearbeitet werden können. Also soll `z0` nun auch ein Vektor oder eine Matrix sein können.

   Verwende in der Funktion `newton` immer 100 Iterationen!

b) Um das globale Verhalten der Abbildung

$$z \mapsto z - \frac{f(z)}{f'(z)},$$

   zu verstehen, betrachten wir nun den Bereich $\Omega = [-2, 2] \times i[-2, 2] \subset \mathbb{C}$. Dazu legen wir ein Gitter mit Maschenweite h über Ω: `[x, y] = meshgrid(-2:h:2)`. Wir wenden nun die Funktion `newton` simultan für alle $z = x + iy$ auf dem Gitter an. Dies ist mit dem Befehl `z = newton(f, df, x + 1i*y)` möglich.

   Dann markieren wir für alle Folgen, welche gegen dieselbe Nullstelle konvergieren, die Anfangswerte jeweils mit einer Farbe. Dies kann mit folgenden Befehlen gemacht werden:

```
surf(x, y, angle(z))
view(2)
shading("flat")
```

   i) Zeichne die Bilder für $h = 0.1, 0.05, 0.01$.

   ii) Wiederhole dies mit einem anderen Teilbereich, z.B. $[-1.5, -0.7] \times i[-1.1, -0.3]$ und $h = 0.001$.

Allgemeine Informationen befinden sich auf der Webseite.
Zuletzt editiert am 12. Mai 2024.