Serie 10

Quadratur

Aufgabe 10.1 (1 Punkt)**:** Lies die Beilage sorgfältig durch und beantworte folgende Fragen:

a) Was ist eine *Quadratur* und wofür braucht sie?

b) Was ist die Idee einer summierten Quadraturregel?

c) Wie kann man die Formel für die summierte Simpson-Regel aus der Beilage herleiten?

d) Was ist die Idee der adaptiven Quadratur?

Aufgabe 10.2 (1.5 + 1.5 Punkte)**:**

a) Schreibe eine MATLAB-Funktion

`q = quad_simpson(f, a, b, n)`,

die eine numerische Approximation $Q(n)$ des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

mit der summierten Simpson-Regel für n Teilintervalle berechnet (siehe Beilage). Dabei soll deine Funktion **ohne** `for`- oder `while`-Schleifen auskommen, und die Funktion `f` soll als function-handle übergeben werden.

b) Bestimme numerisch die Näherungen $Q(n_k)$ des Integrals

$$\int_4^{2+\sqrt{12}} \frac{12}{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}\,\mathrm{d}x = \pi$$

für $n_k = 2^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, 10$. Zeichne den absoluten Fehler $e(n_k) = |\pi - Q(n_k)|$ bezüglich n_k in einem `loglog`-Plot. Trage auch die Geraden durch die Punkte (n_k, n_k^{-4}) und (n_k, n_k^{-5}), $k = 1, \ldots, 10$, ein. Füge einen Titel und eine Legende hinzu. Was beobachtest du? Stimmen deine Beobachtungen mit der Theorie überein?

Aufgabe 10.3 (2 + 1 + 1 Punkte)**:**

a) Schreibe eine MATLAB-Funktion

`q = quad_adapt(f, a, b, f_a, f_b, tol)`,

die eine numerische Approximation des Integrals

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

mit Genauigkeit `tol` berechnet. Die Funktionswerte `f_a` $= f(a)$ und `f_b` $= f(b)$ sollen ebenfalls übergeben werden, sodass das Programm mit möglichst wenigen Funktionsauswertungen auskommt.

Benutze eine adaptive „divide and conquer"-Strategie (siehe Beilage), um die Zerlegung von $[a, b]$ in Teilintervalle automatisch dem Verhalten des Integranden anzupassen.

Zur numerischen Approximation des Integrals soll auf jedem Teilintervall die Trapezregel I_T benutzt werden, während der Fehler durch $|I_S - I_T|$ geschätzt wird. Dabei sei I_S eine Approximation des Integrals auf dem Teilintervall durch die Simpson-Regel.

Die Funktion f wird als Function-handle `f` übergeben.

b) Berechne das Integral

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

mit `tol` $= 10^{-8}$ und gib den absoluten Fehler aus.

c) Was passiert, wenn du versuchst, das Integral

$$\int_0^1 \sin^2(2\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

zu berechnen? Wie erklärst du dir das Resultat?

Aufgabe 10.4 (2 Punkte)**:** Es soll nun die adaptiv angepasste Zerlegung in Teilintervalle grafisch dargestellt werden. Schreibe dafür deine Funktion `quad_adapt` so um, dass sie zusätzlich den Vektor `g` der Intervallgrenzen zurückgibt. Die Funktion hat nun also die Form

```
[q, g] = quad_adapt(f, a, b, f_a, f_b, tol).
```

Falls $|I_S(a, b) - I_T(a, b)| \leq$ `tol`, setze `g = [a, b]`. Falls nicht, so lässt sich der Vektor `g` aus den Intervallgrenzen von den Quadraturen in den beiden Teilintervallen zusammensetzen. Dabei gilt es zu beachten, dass man die Grenze in der Mitte nicht doppelt aufführt.

Wende `quad_adapt` mit `tol` $= 10^{-3}$ auf das Integral

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

an und plotte die Intervallgrenzen mittels `plot(g, 0*g, "+")`. Wie viele Teilintervalle werden benötigt? (Antwort: 78)

Allgemeine Informationen befinden sich auf der Webseite.
Zuletzt editiert am 12. Mai 2024.