Praktikum II „Numerik am Computer“ FS 2024
Prof. Dr. H. Harbrecht Universität Basel
M. Dujella, A. Heinimann, L. Mehrle, M. Morini, M. Ramm, D. Yusofy

Serie 9

QR-Zerlegung und Least Squares

Aufgabe 9.1 (1 Punkt)**:** Lies die Beilage sorgfältig durch und beantworte folgende Fragen:

a) Wie sieht eine QR-Zerlegung aus?

b) Was ist eine orthogonale Matrix?

c) Was heisst es, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ „im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate“ zu lösen?

Aufgabe 9.2 (3 Punkte)**:**

a) Schreibe eine MATLAB-Funktion `x = least_squares(A, b)`, die mit Hilfe der QR-Zerlegung der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt. Die Funktion beginnt folgendermassen:

```
function x = least_squares(A, b)
[m, n] = size(A);
[Q, R] = qr(A);
...
```

Hinweis: Im Programm soll $\mathbf{x}$ als Lösung von $\mathbf{R}_1\mathbf{x} = \mathbf{Q}_1^\top\mathbf{b}$ berechnet werden (siehe Beilage). Benutze dazu deine Rückwärtssubstitution aus Serie 1 und 2 ohne die Adaption für Bandmatrizen.

b) Benutze nun die Funktion `least_squares` um die folgende Aufgabe zu lösen:

Für ein physikalisches Experiment wird angenommen, dass die Grösse z eines Materials von der Temperatur t abhängt. Wir verwenden den Ansatz $z(t) = a + bt + ct^2$.

i	1	2	3	4	5	6	7
t_i	0.05	0.23	0.68	0.84	1.06	1.37	1.55
z_i	5.89	7.25	7.01	5.85	4.43	2.28	0.87

Gegeben seien die Messwerte in der obigen Tabelle. Bestimme die drei Parameter a, b und c mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate und zeichne die Messdaten zusammen mit der Funktion z in eine Grafik.

Aufgabe 9.3 (6 Punkte)**:** Für die folgende Aufgabe wissen wir nicht, zu welchem Polynomgrad die vorgegebenen Daten passen. Ziel ist es nun, herauszufinden, welches Polynom die Daten am besten annähert (im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate) und ob dieses Polynom die Daten auch sinnvoll wiedergibt.

Gegeben seien die folgenden Daten.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0.83	0.75	0.35	0.41	0.61	0.29	0.78	0.37
y_i	-0.86	-0.96	0.78	0.58	-0.62	0.98	-0.96	0.68

i	9	10	11	12	13	14	15
x_i	0.95	0.11	0.21	0.14	0.31	0.54	0.38
y_i	-0.29	0.63	1.00	0.83	0.90	-0.30	0.68

a) Benutze deine Funktion `x = least_squares(A, b)` aus Aufgabe 9.2, um die Daten in der Tabelle für $n = 1, 2, 3, 4, 9, 14$ mit dem Ansatz $p_n(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ anzunähern. Zeichne die Funktionen anschliessend zusammen mit den Daten für jedes n in eine Grafik (benutze dazu den Befehl `subplot`). Schränke den Bereich der x- und y-Achse mit dem Befehl `axis` auf $x \in [0, 1]$ und $y \in [-2, 2]$ ein.

b) Betrachte nun sowohl die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ der Polynome, als auch den Fehler

$$\max_i |y_i - p_n(x_i)|.$$

Für welches Polynom wird der Fehler am kleinsten? Gibt dieses Polynom diese Daten „am besten“ wieder? Diskutiere deine Ergebnisse.

Allgemeine Informationen befinden sich auf der Webseite.
Zuletzt editiert am 3. Mai 2024.