

Serie 7
Spline-Interpolation

Aufgabe 7.1 (1 Punkt): Lies die Beilage sorgfältig durch und beantworte folgende Fragen:

- a) Was ist die Idee des natürlichen kubischen Splines?
- b) Wie sieht der natürliche kubische Spline $s(z)$ auf dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ aus?

Aufgabe 7.2 (2 + 2 + 1 Punkte): Es soll der kubische natürliche Spline $s(x)$ zu den Punkten (x_k, y_k) , $k = 0, 1, \dots, n$ berechnet werden. Dieser Spline ist stückweise definiert, d.h. für $z \in [x_{i-1}, x_i]$ gilt $s(z) = s_i(z)$, $i = 1, \dots, n$. Dabei ist $s_i(z)$ folgendermassen definiert:

$$s_i(z) = A_i + (z - x_{i-1})B_i + (z - x_{i-1})^2(z - x_i)C_i + (z - x_{i-1})(z - x_i)^2D_i.$$

Die Formeln zur Berechnung der Koeffizienten A , B , C und D stehen in der Beilage.

- a) Schreibe eine MATLAB-Funktion $K = \text{spline_coeff}(x, y)$, welche diese Koeffizienten für gegebene Stützpunkte (x_k, y_k) , $k = 0, 1, \dots, n$, berechnet. Dabei sollen x und y Spaltenvektoren sein. Die Spalten der Matrix K sind die Vektoren \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} (MATLAB: $K = [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$;). **Dieses Programm soll ohne for-Schleifen auskommen!**
Berechne im Programm zuerst die Schrittweite h und die dividierten Differenzen $f[x_i, x_{i-1}]$. Dies sind beides Vektoren der Länge n (hier ist der Befehl `diff` sehr nützlich). Berechne danach die $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix \mathbf{M} , den Vektor \mathbf{d} (Länge $n+1$) und damit den Vektor der Steigungen \mathbf{p} (ebenfalls Länge $n+1$). Für das Aufstellen der Matrix ist der Befehl `diag` sehr nützlich. Auch der Befehl `end` (als Index) kann nützlich sein. Nun können alle Koeffizienten \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} (alles Vektoren der Länge n) berechnet und zusammengefasst werden.
- b) Schreibe eine MATLAB-Funktion $s = \text{spline_interpol}(K, x, z)$, die den Spline s an der Stelle z auswertet. Dabei soll z auch ein Vektor sein können. Eine Vorlage zu dieser Funktion findest du auf der Webseite.
- c) Teste deine Programme.
 - i) Wie lauten die Koeffizienten des Splines s durch die Stützpunkte $(0, 1)$, $(0.5, 3)$ und $(1.5, 4)$?
(Antwort: $\mathbf{A} = [1, 3]^\top$, $\mathbf{B} = [4, 1]^\top$, $\mathbf{C} = [-4, -1]^\top$ und $\mathbf{D} = [2, 2]^\top$)
 - ii) Bestimme $s(z)$ an den Stellen $z = 0.2$, $z = 0.4$, $z = 0.6$ und $z = 0.8$.
(Antwort: $s(0.2) \approx 1.88$, $s(0.4) \approx 2.67$, $s(0.6) \approx 3.27$, und $s(0.8) \approx 3.66$)

Aufgabe 7.3 (2 + 2 Punkte): Zu einer gegebenen Folge von Punkten (x_k, y_k) , $k = 1, \dots, n$, in der Ebene soll eine interpolierende glatte Kurve $\gamma(t) := (s_x(t), s_y(t))$ durch diese Punkte konstruiert werden. Dabei sind s_x und s_y eingespannte Splines mit den Stützstellen (t_k, x_k) bzw. (t_k, y_k) . Die Stützknöten t_k sind auf folgende Weise durch die Distanzen zwischen den aufeinanderfolgenden Punkten (x_k, y_k) festgelegt:

$$t_1 = 0, \\ t_k = t_{k-1} + \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}, \quad k = 2, \dots, n.$$

Um die Kurve $\gamma(t)$ zu zeichnen, bestimmt man für $t \in [t_1, t_n]$ die eingespannten Splines $s_x(t)$ und $s_y(t)$ durch die Stützstellen (t_k, x_k) bzw. (t_k, y_k) und plottet die Punktepaare $(s_x(t), s_y(t))$ mit $t \in [t_1, t_n]$.

- a) Lade die Datei `Points.txt` von der Webseite herunter, welche eine Punktfolge (x_k, y_k) , $k = 1, \dots, n$ enthält. Schreibe ein MATLAB-Skript `plot_curve_spline`, das die interpolierende glatte Kurve $\gamma(t)$, $t \in [t_1, t_n]$ (Schrittweite 0.1), durch diese Punkte zeichnet. Zur Spline-Interpolation kannst du den MATLAB-Befehl `spline` verwenden (siehe Beilage). Ein Skelett des Codes findest du auf der Webseite.
- b) Schreibe ein MATLAB-Skript `plot_surprise` zum Zeichnen der Überraschung, die wir vorbereitet haben. Das Überraschungsbild besteht aus *mehreren* interpolierenden glatten Kurven durch Punkte, die in der Datei `PointsSurprise.txt` gespeichert sind. In der Datei `NPointsSurprise.txt` ist gespeichert, wie viele Stützstellen jeweils eine dieser Kurven besitzt. Ein Skelett des Codes kannst du von der Webseite herunterladen.