Serie 5

Newton-Interpolation in 2D

Aufgabe 5.1 (2 Punkte)**:** Lies die Beilage sorgfältig durch und beantworte folgende Fragen:

a) Was ist die Idee der zweidimensionalen Newton-Interpolation auf dem Einheitsquadrat?

b) Wie sehen die Polynome $p_j(x) = \sum \ldots$ von der Beilage aus?

c) Berechne für die Stützpunkte $(\eta_j, p_j(x))$, $j = 0, 1, 2$, die dividierten Differenzen $g[\eta_0, \eta_1]$ und $g[\eta_1, \eta_2]$. Setze dazu $g[\eta_j] = p_j(x)$, $j = 0, 1, 2$.

Aufgabe 5.2 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)**:** Wir wollen die Newton-Polynominterpolation auf dem Einheitsquadrat $[0, 1]^2$ implementieren.

a) Schreibe eine Funktion

```
C = newton_coeff_2D(xi, eta, F),
```

welche die Koeffizienten des zweidimensionalen Interpolationspolynoms zu den Stützstellen ξ und η mit den Stützwerten $\mathbf{F}$ bestimmt. Dazu müssen die dividierten Differenzen wie im eindimensionalen Fall zunächst für jede Zeile von $\mathbf{F}$ und dann für jede Spalte von $\mathbf{F}$ berechnet werden (siehe Beilage).

b) Schreibe eine Funktion

```
V = newton_interpol_2D(xi, eta, C, x, y),
```

welche das zweidimensionale Interpolationspolynom im Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auswertet. Deine Funktion `newton_interpol_2D` darf die Funktion `newton_interpol` aus Serie 4 aufrufen.

c) Lade die Datei `F.txt` von der Webseite in MATLAB mit dem Befehl `load F.txt`. Diese Datei enthält Stützwerte $\mathbf{F} = [f(\xi_i, \eta_j)]_{j,i}$ einer Funktion f zu äquidistanten Stützstellen $(\xi_i, \eta_j) \in [0, 1]^2$ für $i = 0, \ldots, 3$ und $j = 0, \ldots, 5$. Bestimme zuerst die Koeffizienten $\mathbf{C}$. Werte nun dein Interpolationspolynom an den Stellen $(x, y) = (kh, \ell h)$ aus, wobei $h = 0.01$, $k = 0, \ldots, 100$ und $\ell = 0, \ldots, 100$. Dabei kannst du wie folgt vorgehen:

```
[X, Y] = meshgrid((0:100) / 100);
V = zeros(101);
for j = 1:101
    for i = 1:101
        V(j, i) = newton_interpol_2D(xi, eta, C, X(j, i), Y(j, i));
    end
end
```

Zeichne dann mit `surf(X, Y, V)` deine interpolierte Funktion. Vergleiche dein Resultat mit dem Plot in Abbildung 1.

d) In dieser Aufgabe wollen wir den Interpolationsfehler zu verschiedenen Stützstellen visualisieren. Dazu betrachten wir die Funktion $f(x, y) = \exp\left(-(x - y)^2\right)$ mit $m = n = 9$ einmal für äquidistante Stützstellen in $[0, 1]^2$ und einmal für die Chebyshev-Knoten

$$x_k = \frac{1 + \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right)}{2}$$

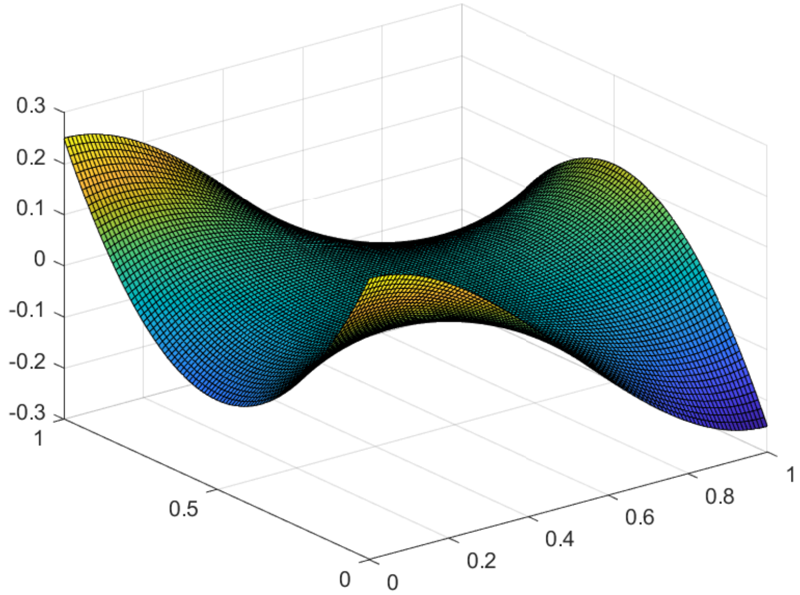

Abbildung 1: Affensattel

für $k = 0, \dots, n$. Berechne jeweils die Stützwerte $\mathbf{F}$.

Bestimme in beiden Fällen die Koeffizienten $\mathbf{C}$ und werte das Polynom anschliessend an denselben Stellen (x, y) wie in Teil c) aus. Dies gibt dir jeweils eine Matrix `V`. Speichere ausserdem die „korrekten" Werte der Funktion $f(x, y)$, ausgewertet an den Stützstellen (x, y) aus Teil c), in einer Matrix `V_exact`. Nun kann der Interpolationsfehler mit dem Befehl `max(abs(V(:) - V_exact(:)))` berechnet werden. Für welche Wahl der Stützstellen ist der Fehler kleiner? Visualisiere jeweils den punktweisen Fehler `abs(V - V_exact)` und zeichne die Funktion $f(x, y)$. Dabei ist der Befehl `surf` hilfreich.

Allgemeine Informationen befinden sich auf der Website.
Zuletzt editiert am 5. April 2024.