Serie 4

Horner-Schema und Polynominterpolation

Aufgabe 4.1 (1 Punkt)**:** Lies die Beilage sorgfältig durch und beantworte folgende Fragen:

a) Was ist die Idee der Polynominterpolation?

b) Wie sieht eine allgemeine Darstellung eines Polynoms p aus?

c) Du möchtest die Funktion $p(z) = mz + q$ mit $m, q \in \mathbb{R}$, die durch die Punkte $(0, 3)$ und $(1, -1)$ geht, bei $z = 0.6$ auswerten. Wie gehst du vor?

d) Wozu und weshalb wird das Horner-Schema gebraucht?

Aufgabe 4.2 (1 + 0.5 Punkte)**:**

a) Schreibe zwei MATLAB-Funktionen

`a = monomial_coeff(x, y)` und `p = monomial_interpol(a, z)`.

Die Funktion `monomial_coeff` soll die Koeffizienten, welche in der monomialen Darstellung vorkommen, berechnen. Die Funktion `monomial_interpol` soll den Wert des Interpolationspolynoms p an einer beliebigen Stelle z mit Hilfe dieser Koeffizienten auswerten. Es soll auch möglich sein, z als Vektor zu übergeben. Benutze dafür das Horner-Schema (siehe Beilage).

b) Teste deine Programme:

i) Was sind die Koeffizienten des Interpolationspolynoms p durch die Stützstellen

$$(-2, -3), (-1, -51), (1, 33) \text{ und } (2, -3)?$$

(Antwort: $a_0 = -11$, $a_1 = 56$, $a_2 = 2$ und $a_3 = -14$)

ii) Was ist $p(\mathbf{z})$ für

$$\mathbf{z} = (-5, -2, 0, 1, 3, 4, 6)?$$

(Antwort: $p(\mathbf{z}) = (1509, -3, -11, 33, -203, -651, -2627)$)

Aufgabe 4.3 (2.5 + 1 Punkte)**:**

a) Schreibe zwei MATLAB-Funktionen

`c = newton_coeff(x, y)` und `p = newton_interpol(c, x, z)`.

Die erste Funktion soll die Koeffizienten der Newton-Interpolation berechnen. Die zweite Funktion sollte mit der Newtonschen Interpolationsformel den Wert des Interpolationspolynoms p durch die Stützpunkte (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, n$, an der Stelle $z \in \mathbb{R}$ berechnen. Es soll wiederum möglich sein, z als Vektor zu übergeben.

b) Teste deine Programme:

i) Was sind die Newton-Koeffizienten des Interpolationspolynoms p durch die Stützpunkte

$$(-2, -3), (-1, -51), (1, 33) \text{ und } (2, -3)?$$

(Antwort: $c_0 = -3$, $c_1 = -48$, $c_2 = 30$ und $c_3 = -14$)

ii) Was ist $p(\mathbf{z})$ für

$$\mathbf{z} = (-5, -2, 0, 1, 3, 4, 6)?$$

(Antwort: siehe Aufgabe 4.2 b) ii))

Aufgabe 4.4 (1 + 1 + 1 + 1 Punkte)**:** Wir stellen uns in dieser Aufgabe vor, dass es in MATLAB keine Funktion gibt, um den Cosinus zu berechnen. Daher müssen wir unsere eigene Cosinus-Funktion schreiben, wobei wir annehmen, dass wir zu den Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ in $[0, 2\pi]$ die Werte $y_i := \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$ kennen.

a) Schreibe drei MATLAB-Funktionen, welche jeweils eine Approximation für den Cosinus liefern. Du kannst dazu entweder die monomiale Interpolation aus Aufgabe 4.2 oder die Newton-Interpolation aus Aufgabe 4.3 verwenden. Die Funktionen sollen auch Vektoren als Eingabe akzeptieren.

i) Die Funktion `p_1 = approx_cos_1(z)` soll die Stützstellen

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y_i	1	0	-1	0	1

benutzen.

ii) Die Funktion `p_2 = approx_cos_2(z)` soll die Stützstellen

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y_i	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

benutzen.

iii) Die Funktion `p_3 = approx_cos_3(z)` soll die Stützstellen

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y_i	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

benutzen.

b) Zeichne die drei Approximationen der Cosinus-Kurve für $z \in [0, 2\pi]$ (Schrittweite $\frac{\pi}{100}$) sowie die exakte Lösung in ein Bild. Zeichne danach die Approximationen der Cosinus-Kurve für $z \in [-\pi, 3\pi]$ (Schrittweite $\frac{\pi}{100}$) in ein Bild. Benutze `legend`, um den Bildern eine Legende hinzuzufügen und gib ihnen mit `title` eine Überschrift. Was fällt dir auf?

c) Um unsere Approximation auch für $z \notin [0, 2\pi]$ sinnvoll gebrauchen zu können, nutzen wir die Periodizität der Cosinus-Funktion aus: Modifiziere deine Funktionen aus Teil a) so, dass z auf ein $\tilde{z} \in [0, 2\pi]$ mit $\cos(z) = \cos(\tilde{z})$ abgebildet wird, bevor die eigentliche Approximation berechnet wird. Dabei hilft der MATLAB-Befehl `mod`.

d) Zeichne mit der Modifikation aus c) die drei Approximationen $p_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, für $z \in [-2\pi, 4\pi]$ (Schrittweite $\frac{\pi}{100}$) sowie die exakte Lösung in ein Bild. Zeichne ausserdem den absoluten Fehler $|p_i(z) - \cos(z)|$, $i = 1, 2, 3$, einmal mit dem Befehl `plot` und einmal mit dem Befehl `semilogy` in jeweils ein Bild. Beschrifte die Bilder wiederum mit einer Überschrift und einer Legende. Welche der drei Approximationen ist am besten?

Allgemeine Informationen befinden sich auf der Website.
Zuletzt editiert am 22. März 2024.