Praktikum II „Numerik am Computer“ FS 2024
Prof. Dr. H. Harbrecht Universität Basel
M. Dujella, A. Heinimann, L. Mehrle, M. Morini, M. Ramm, D. Yusofy

Beilage zur Serie 3

Cholesky-Zerlegung

Die Cholesky-Zerlegung zerlegt eine symmetrisch positiv definite Matrix $\mathbf{A}$ in eine linke untere Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$ und ihre Transponierte, d.h. $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$.

Dabei sind nun nicht mehr alle Diagonaleinträge der Matrix $\mathbf{L}$ gleich 1. Ähnlich wie bei der Implementierung der LR-Zerlegung mit Pivotisierung in der Serie 2 möchten wir nicht eine komplett neue Matrix $\mathbf{L}$ erzeugen, sondern die Einträge der Matrix $\mathbf{A}$ im Verlauf des Verfahrens überschreiben. Dabei werden nur die Einträge im unteren Block und auf der Diagonalen von $\mathbf{A}$ überschrieben. Die Einträge im oberen Block werden nicht verändert und sind nach der Zerlegung nicht mehr relevant.

Der Algorithmus für die Cholesky-Zerlegung lautet wie folgt:

for $i = 1$ to n **do**

$$a_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k}^2}$$

for $j = i + 1$ to n **do**

$$a_{j,i} = \frac{1}{a_{i,i}} \left(a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{j,k} a_{i,k} \right)$$

end for

end for

Setze $\mathbf{L}$ = Hauptdiagonale + untere Dreieckshälfte von $\mathbf{A}$

Der Aufwand für den Algorithmus ist etwa $n^3/6$ Multiplikationen.

Eine eindeutige Cholesky-Zerlegung existiert genau dann, wenn die Matrix symmetrisch und positiv definit ist. Ist der Term

$$a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k}^2$$

für ein i kleiner als 0, so ist die Matrix nicht positiv definit und der Algorithmus muss abgebrochen werden.

Bemerkung: Eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst positiv definit, falls

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$$

gilt.

Allgemeine Informationen befinden sich auf der Website.
Zuletzt editiert am 15. März 2024.