Praktikum II „Numerik am Computer“ FS 2024
Prof. Dr. H. Harbrecht Universität Basel
M. Dujella, A. Heinimann, L. Mehrle, M. Morini, M. Ramm, D. Yusofy

Beilage zur Serie 1

LR-Zerlegung und Permutationsmatrizen

LR-Zerlegung

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

kann der Gauss-Algorithmus benutzt werden. Dazu

1. wird die LR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{R}$ der Matrix $\mathbf{A}$ berechnet. Dabei ist $\mathbf{L}$ eine untere linke Dreiecksmatrix mit 1 auf der Hauptdiagonalen und $\mathbf{R}$ eine obere rechte Dreiecksmatrix.
2. wird das Gleichungssystem $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ nach $\mathbf{y}$ gelöst (Vorwärtssubstitution).
3. wird das Gleichungssystem $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ nach $\mathbf{x}$ gelöst (Rückwärtssubstitution).

Der Aufwand für den Gauss-Algorithmus ist etwa $n^3/3$ Multiplikationen.

Für *Bandmatrizen* kann der Algorithmus effizient implementiert werden. Für $p, q \in \mathbb{N}$ ist eine Matrix $\mathbf{A}$ eine Bandmatrix mit *oberer Bandbreite* p und *unterer Bandbreite* q, falls gilt:

$$a_{i,j} = 0 \text{ für } i + p < j \text{ oder } j + q < i.$$

Neben der Haupptdiagonale sind also nur die p oberen und die q unteren Nebendiagonalen besetzt. Die restlichen Einträge sind allesamt 0. Solche Matrizen entstehen häufig bei der Diskretisierung von Differentialgleichungen.

Der Algorithmus für die LR-Zerlegung einer Bandmatrix ist in *Pseudocode* gegeben als:

$\mathbf{L} = \mathbf{E}$
$\mathbf{R} = \mathbf{A}$
for $k = 1$ to $n - 1$ **do**
  for $i = k + 1$ to $\min(n, k + q)$ **do**
    $\ell_{i,k} = \dfrac{r_{i,k}}{r_{k,k}}$
    for $j = k$ to $\min(n, k + p)$ **do**
      $r_{i,j} = r_{i,j} - \ell_{i,k} r_{k,j}$
    end for
  end for
end for

Nachdem nun die LR-Zerlegung bestimmt wurde, löst man in der Vorwärtssubstitution das Gleichungssystem

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

Ausgeschrieben hat dieses Gleichungssystem die Form

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ell_{1,1}y_1 & & & & & & & & = & b_1 & (1)\\
\ell_{2,1}y_1 & + & \ell_{2,2}y_2 & & & & & & = & b_2 & (2)\\
\ell_{3,1}y_1 & + & \ell_{3,2}y_2 & + & \ell_{3,3}y_3 & & & & = & b_3 & (3)\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & \vdots & \\
\ell_{n,1}y_1 & + & \ell_{n,2}y_2 & + & \ell_{n,3}y_3 & + & \cdots & + \; \ell_{n,n}y_n & = & b_n & (n)
\end{array}$$

Die Gleichungen (1) bis (n) können nacheinander jeweils nach $y_1, \ldots, y_n$ aufgelöst werden. Das ergibt

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{b_1}{\ell_{1,1}}, \\
y_2 &= \frac{1}{\ell_{2,2}}(b_2 - \ell_{2,1}y_1), \\
y_3 &= \frac{1}{\ell_{3,3}}\big(b_3 - (\ell_{3,1}y_1 + \ell_{3,2}y_2)\big), \\
&\vdots \\
y_n &= \frac{1}{\ell_{n,n}}\left(b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \ell_{n,k}y_k\right).
\end{aligned}$$

Zusammenfassend lautet der Pseudocode dazu also:

```
y_1 = b_1 / ℓ_{1,1}
for i = 2, 3, ..., n do
    y_i = 1/ℓ_{i,i} ( b_i − Σ_{k=1}^{i−1} ℓ_{i,k} y_k )
end for
```

Analog ergibt sich für die Rückwärtssubstitution, in der das Gleichungssystem

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$$

gelöst wird, dass

$$x_i = \frac{1}{r_{i,i}}\left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{i,k}x_k\right),$$

wobei zuerst x_n berechnet wird, dann x_{n-1}, und so weiter, bis x_1 ausgerechnet ist.

Indem die Bandstruktur der Matrix $\mathbf{A}$ berücksichtigt wird, lässt sich sowohl die Vorwärts- als auch die Rückwärtssubstitution effizienter implementieren, sodass wir für den Gauss-Algorithmus für Bandmatrizen einen Aufwand von ungefähr $n(pq + p + q)$ Multiplikationen erhalten.

Permutationsmatrizen

Eine *Permutation* π ist eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. Das heisst, sie permutiert („mischt") die Zahlen $\{1, \dots, n\}$. Eine häufig benutzte Darstellung einer Permutation ist die *Zweizeilenform*:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \pi(1) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

In der oberen Zeile stehen die Zahlen von 1 bis n und für jede Zahl $j \in \{1, \dots, n\}$ steht darunter der Funktionswert $\pi(j)$.

Die einer Permutation zugehörigen *Permutationsmatrix* $\mathbf{P}_\pi$ ist nun die $(n \times n)$-Matrix, welche jeweils eine 1 in der j-ten Spalte und der $\pi(j)$-ten Zeile besitzt und Nullen überall sonst (d.h. $\mathbf{P}_\pi \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{\pi(i)}$). Diese Matrizen haben folgende Eigenschaften:

1.) $\mathbf{P}_\pi \mathbf{P}_\sigma = \mathbf{P}_{\pi \circ \sigma}$, für zwei Permutationen π und σ;

2.) $\mathbf{P}_\pi^{-1} = \mathbf{P}_{\pi^{-1}} = \mathbf{P}_\pi^\top$, also $\mathbf{P}_\pi \mathbf{P}_\pi^\top = \mathbf{E}$ (Orthogonalität);

3.) $\det(\mathbf{P}_\pi) = \operatorname{sign} \pi = \pm 1$.

Beispiel:

$$\mathbf{P}_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist die zur Permutation } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ zugehörige Permutationsmatrix.}$$

Eine weitere gängige Darstellung von Permutationen ist die *Zyklenschreibweise*. Dabei wird genutzt, dass sich jede Permutation eindeutig (bis auf Reihenfolge) als Produkt disjunkter *Zyklen* darstellen lässt. Der Zyklus einer Zahl $a \in \{1, \dots, n\}$ ist $\begin{pmatrix} a & \pi(a) & \pi^2(a) & \cdots & \pi^{\ell_a - 1}(a) \end{pmatrix}$ und hat Länge $\ell_a \in \mathbb{N}$, wobei ℓ_a die kleinste natürliche Zahl ist, die $\pi^{\ell_a}(a) = a$ erfüllt. Beachte dabei: Es gilt auch $\mathbf{P}_\pi^k \mathbf{e}_a = \mathbf{e}_{\pi^k(a)}$ für $k \in \{1, \dots, \ell_a\}$.

Das *Signum* einer Permutation (und damit die Determinante der zugehörigen Permutationsmatrix, siehe Punkt 3 oben) ist bestimmt durch die Anzahl der Zyklen mit gerader Länge: Hat eine Permutation k Zyklen mit gerader Länge, so ist das Signum der Permutation $(-1)^k$.

Beispiel: Für die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

lautet die Zyklenschreibweise

$$\pi = (1)(246)(35) = (246)(35).$$

Das Signum der Permutation ist in diesem Fall -1.

Allgemeine Informationen befinden sich auf der Website.
Zuletzt editiert am 1. März 2024.