

Serie 12

Maple – Infinitesimalrechnung, Matrizen, 3D-Plots

zur 50. KW (11. – 15.12.2023)

Hinweis: Für diese Serie gibt es wegen der Projektabgabe keine zusätzliche Woche Zeit. Die Serie muss also zwingend in Woche 50 abgegeben werden.

Aufgabe 12.1 (5.5 Punkte):

a) i) Berechne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin(x) - \cos(x)}{x}.$$

ii) Bestimme bei dem Ausdruck

$$\frac{\cot(x) \ln(x)}{\cos(x)x^2}$$

die ersten drei Ableitungen nach x und vereinfache die Resultate so weit wie möglich. Zeichne die Funktion und ihre erste Ableitung für $x \in [0, 3]$ in dieselbe Grafik. Wähle selbst sinnvolle Werte für die y -Achse.

b) i) Integriere den Ausdruck

$$\frac{x^2}{1 + x^6}$$

zuerst unbestimmt, dann von 0 bis ∞ und schliesslich von 0 bis 1.

ii) Bestimme die Werte von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{für } x = 5 \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^N \frac{n+2}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{für } N = 22.$$

Benutze dazu die Befehle `sum`, `subs` und `evalf`.

Aufgabe 12.2 (2.5 Punkte):a) i) Berechne das Matrix-Vektor-Produkt $\mathbf{A}\mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ii) Berechne den Ausdruck $2\mathbf{A} - 3\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ für die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 7 & 10 & -1 & 0 \\ 5 & -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ -6 & 7 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & 3 & 3 \\ -7 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & -5 \\ 0 & 8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

durch Multiplikation mit der Inversen.

Aufgabe 12.3 (2 Punkte):

a) i) Zeichne für $0 \leq t \leq 2\pi$ die parametrische "Lissajous-Kurve" $(x(t), y(t))$ definiert durch

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(3t), \\ y(t) &= \sin(4t). \end{aligned}$$

ii) Zeichne die Fläche

$$z = \frac{\sin(15\sqrt{x^2 + y^4})}{\sqrt{x^2 + y^4}}, \quad x \in [-1, 1], \quad y \in [-1, 1].$$

b) Zeichne folgende parametrisierte Flächen:

i) Für $u \in [-5, 5]$, $v \in [-5, 5]$:

$$\begin{aligned} x &= \sinh(u) \cos(v), \\ y &= \sinh(u) \sin(v), \\ z &= v \end{aligned}$$

ii) Für $u \in [-10, 10]$, $v \in [-10, 10]$:

$$\begin{aligned} x &= u + u^2v, \\ y &= uv, \\ z &= u^2 - v^2 \end{aligned}$$