Mathematik am Computer Maple, Teil II

Marcus Grote und Helmut Harbrecht

Universität Basel

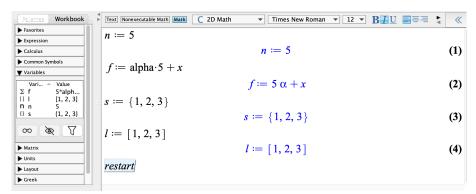
11. - 15. Dezember 2023

Übersicht

- Maple-workspace
- Symbolisches Differenzieren und Integrieren von Funktionen
- Grenzwerte und Folgen
- 4 Lineare Algebra und Geometrie mit Maple

Maple-Variablen und restart

Wenn eine neue Maple Datei erstellt wird oder eine geöffnet wird, ist der Variablen-Workspace leer. Die Variablen werden durch das Ausführen von Befehlen definiert.



Um diesen wieder zu leeren wird der Befehl restart benutzt.

Differenzieren von Funktionen

Differenzieren mittels diff: Aus der Maple-Hilfe:

```
diff or Diff - Differentiation or Partial
Differentiation

Calling Sequence
    diff(f, x1, ..., xj)
    diff(f, [x1$n])
    diff(f, x1$n, [x2$n, x3], ... xi, [xj$m])
```

Vorschau auf Analysis II:

Was bedeutet "Partial Differentiation"?

Differenzieren von Funktionen

Beispiel: Eine Funktion f hängt nicht nur von x, sondern 2 Variablen x_1 und x_2 ab:

$$f = f(x_1, x_2), \text{ z.B. } f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Dann kann man nach einer der Komponenten von $x = (x_1, x_2)$ differenzieren, z.B.

$$\frac{\partial}{\partial x_2}f(x_1,x_2)=2\cdot x_2,$$

da x_1 nicht von x_2 abhängt, d.h. x_1 ist bzgl. x_2 eine Konstante.

Beispiele:

- diff($x1^2+x2^2,x2$);
- diff(sin(x),x);
- o diff(sin(x),x\$2);
- diff(f(x)*g(x),x);
- diff(x^a,x);

Symbolisches Rechnen: Differenzieren

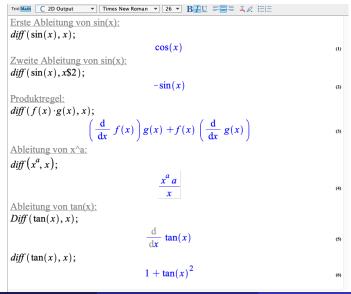
Was bedeutet "Diff" im Gegensatz zu "diff"? Die Eingabe von

ergibt die Ausgabe

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan(x)^2, \tag{1}$$

d.h. "Diff" ist nur für eine (für Mathematiker) schöne Ausgabe zuständig.

Differenzieren von Funktionen



Der Zusammenhang zwischen diff und int

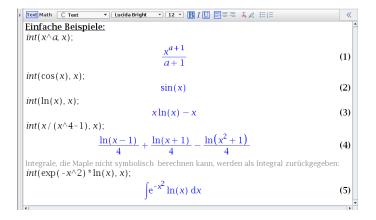
Entsprechend

$$\int f(x)dx = F(x) \iff F'(x) = f(x)$$

ist diff die Umkehrabbildung zu int, d.h. die Nacheinanderanwendung von diff und int ergibt den ursprünglichen Ausdruck, z.B. liefert die Eingabe von

die Funktion f(x) zurück, auch wenn diese nicht explizit gegeben ist.

Unbestimmtes Integrieren



Bestimmte Integrale und evalf

Hat man eine Stammfunktion F(x) zu f(x) bestimmt, gilt

int(f, x=a..b)
$$\stackrel{\triangle}{=} \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
.

Alternative:

$$F:=int(f(x),x);$$
 subs(x=b,F)-subs(x=a,F);

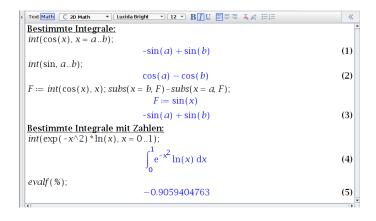
Sind die Integralgrenzen a und b Parameter und zunächst beliebig \longrightarrow symbolisches Rechnen.

Seien jetzt die Integralgrenzen a und b gegeben. 2 mögliche Varianten:

V 1: Bestimme eine Stammfunktion, setze dann die Zahlen ein. **Problem:** nicht für jede Funktion *f* ist eine Stammfunktion *F* bekannt.

- **V 2:** Aufruf von int mit Intervalgrenzen a und b und evalf. Dann sind auch Integrale berechenbar, die symbolisch es nicht waren.
 - → numerische Approximation von Integralen (siehe "Einführung in die Numerik")

Bestimmte Integrale und evalf



Grenzwerte mit Maple berechnen

Zur Bestimmung von Grenzwerten gibt es den Befehl limit:

```
limit (f(x), x=a, dir) \triangleq \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)
\lim_{x \to a} f(x
```

Beispiele:

• Grenzwert von $\sin(x)/x$ für $x \to 0$ (via l'Hospital):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1$$

Maple: limit ($\sin(x)/x$, x=0);

• Grenzwert von e^x für $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

Maple: limit (exp(x), x=infinity);

Rechnen mit Matrizen

Zusatzpaket: with (LinearAlgebra):

- Definition von Matrizen: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
 - \bullet A:= <<1,3>|<2,4>>;
 - \bullet A:= Matrix(2, 2, [1,2,3,4];
 - A:= Matrix(2, 2, [[1,2],[3,4]]);
- Element der Matrix: A[1,2];
- Definition von Vektoren: $\mathbf{b} = (5 \ 6)^{\mathsf{T}}$:
 - <5,6>;
 - Vector([5, 6]);

Rechnen mit Matrizen

```
Multiplikation (Ab): A.b; oder Multiply(A,b);
Inverse Matrix: A^(-1); oder MatrixInverse(A);
Determinant: Determinant(A);
Transponiert: Transpose(A);
Spur: Trace(A);
```

Lineare Algebra und Geometrie mit Maple

Das Zusatzpaket VectorCalculus stellt einige Zusatzbefhle zur Behandlung von Vektoren zur Verfügung. Eine kleine Auswahl:

• Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Dabei seien $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ die Koeffizienten bzgl. der Einheitsbasis.

Entsprechung in Maple: DotProduct (a, b).

Beispiel:

```
with(VectorCalculus):
DotProduct(<a1,a2>,<b1,b2>);
```

Lineare Algebra und Geometrie mit Maple

Norm ("Betrag") eines Vektors ä der Dimension n:

$$||\vec{a}||_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |a_i|^p}$$

für p < ∞ bzw.

$$||\vec{a}||_{\infty} := \max_{p=1,\ldots,n} |a_i|$$

Entsprechung in Maple: Norm(a, p).

Beispiele:

- Euklidischer Abstand (p = 2):
 Norm (<1, 0, 1>, 2)
- Maximum-Norm $(p = \infty)$: Norm (<-3, 0, 1, 2>, infinity);

Lineare Algebra und Geometrie mit Maple

Lösen eines linearen Gleichungssystems:

$$\mathbf{V}\vec{b} = \vec{a}$$

mit einer Matrix $\mathbf{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

Realisierung in Maple:

```
with(LinearAlgebra):
a:=<a1,a2>;
v1:=<1,1>;
v2:=<0,1>;
V:=<v1|v2>;
LinearSolve(V,a);
```