

Mathematik am Computer

Maple, Teil II

Marcus Grote und Helmut Harbrecht

Universität Basel

11. – 15. Dezember 2023

Übersicht

- 1 Maple-workspace
- 2 Symbolisches Differenzieren und Integrieren von Funktionen
- 3 Grenzwerte und Folgen
- 4 Lineare Algebra und Geometrie mit Maple

Maple-Variablen und `restart`

Wenn eine neue Maple Datei erstellt wird oder eine geöffnet wird, ist der Variablen-Workspace leer. Die Variablen werden durch das Ausführen von Befehlen definiert.

The screenshot shows the Maple workspace interface. On the left is a 'Palettes' sidebar with categories like Favorites, Expression, Calculus, Common Symbols, and Variables. The 'Variables' section is expanded, showing a table of current variables:

Vari...	Value
Σ f	$5 \cdot \text{alph}...$
[] l	[1, 2, 3]
n n	5
[] s	{1, 2, 3}

The main workspace area displays the following definitions and the `restart` command:

$$n := 5 \quad (1)$$

$$f := \text{alpha} \cdot 5 + x \quad (2)$$

$$s := \{1, 2, 3\} \quad (3)$$

$$l := [1, 2, 3] \quad (4)$$

Below these definitions, the command `restart` is shown in a light blue box.

Um diesen wieder zu leeren wird der Befehl `restart` benutzt.

Differenzieren von Funktionen

Differenzieren mittels `diff`: Aus der Maple-Hilfe:

`diff` or `Diff` – Differentiation or Partial
Differentiation

Calling Sequence

```
diff(f, x1, ..., xj)
```

```
diff(f, [x1$n])
```

```
diff(f, x1$n, [x2$n, x3], ... xi, [xj$m])
```

Vorschau auf Analysis II:

Was bedeutet „Partial Differentiation“?

Differenzieren von Funktionen

Beispiel: Eine Funktion f hängt nicht nur von x , sondern 2 Variablen x_1 und x_2 ab:

$$f = f(x_1, x_2), \text{ z.B. } f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Dann kann man nach einer der Komponenten von $x = (x_1, x_2)$ differenzieren, z.B.

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_2,$$

da x_1 nicht von x_2 abhängt, d.h. x_1 ist bzgl. x_2 eine Konstante.

Beispiele:

- `diff(x1^2+x2^2, x2) ;`
- `diff(sin(x), x) ;`
- `diff(sin(x), x$2) ;`
- `diff(f(x)*g(x), x) ;`
- `diff(x^a, x) ;`

Symbolisches Rechnen: Differenzieren

Was bedeutet „Diff“ im Gegensatz zu „diff“ ?

Die Eingabe von

```
Diff(tan(x), x) = diff(tan(x), x);
```

ergibt die Ausgabe

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan(x)^2, \quad (1)$$

d.h. „Diff“ ist nur für eine (für Mathematiker) schöne Ausgabe zuständig.

Differenzieren von Funktionen

Text Math C 2D Output Times New Roman 26 B U

Erste Ableitung von $\sin(x)$:
 $\text{diff}(\sin(x), x);$
 $\cos(x)$ (1)

Zweite Ableitung von $\sin(x)$:
 $\text{diff}(\sin(x), x^2);$
 $-\sin(x)$ (2)

Produktregel:
 $\text{diff}(f(x) \cdot g(x), x);$
 $\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) g(x) + f(x) \left(\frac{d}{dx} g(x)\right)$ (3)

Ableitung von x^a :
 $\text{diff}(x^a, x);$
 $\frac{x^a a}{x}$ (4)

Ableitung von $\tan(x)$:
 $\text{Diff}(\tan(x), x);$
 $\frac{d}{dx} \tan(x)$ (5)

$\text{diff}(\tan(x), x);$
 $1 + \tan(x)^2$ (6)

Der Zusammenhang zwischen `diff` und `int`

Entsprechend


$$\int f(x) dx = F(x) \iff F'(x) = f(x)$$

ist `diff` die Umkehrabbildung zu `int`, d.h. die Nacheinanderanwendung von `diff` und `int` ergibt den ursprünglichen Ausdruck, z.B. liefert die Eingabe von

```
diff(int(f(x), x), x);
```

die Funktion $f(x)$ zurück, auch wenn diese nicht explizit gegeben ist.

Unbestimmtes Integrieren

Text Math C Text Lucida Bright 12 B I U  <<

Einfache Beispiele:

$\text{int}(x^a, x);$

$$\frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (1)$$

$\text{int}(\cos(x), x);$

$$\sin(x) \quad (2)$$

$\text{int}(\ln(x), x);$

$$x \ln(x) - x \quad (3)$$

$\text{int}(x / (x^4 - 1), x);$

$$\frac{\ln(x-1)}{4} + \frac{\ln(x+1)}{4} - \frac{\ln(x^2+1)}{4} \quad (4)$$

Integrale, die Maple nicht symbolisch berechnen kann, werden als Integral zurückgegeben:

$\text{int}(\exp(-x^2) * \ln(x), x);$

$$\int e^{-x^2} \ln(x) dx \quad (5)$$

Bestimmte Integrale und `evalf`

Hat man eine Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x)$ bestimmt, gilt

$$\text{int}(f, x=a..b) \hat{=} \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Alternative:

`F:=int(f(x), x); subs(x=b, F) - subs(x=a, F);`

Sind die Integralgrenzen a und b *Parameter* und zunächst beliebig
 → symbolisches Rechnen.

Seien jetzt die Integralgrenzen a und b gegeben. 2 mögliche Varianten:

V 1: Bestimme eine Stammfunktion, setze dann die Zahlen ein.

Problem: nicht für jede Funktion f ist eine Stammfunktion F bekannt.

V 2: Aufruf von `int` mit Intervallgrenzen a und b und `evalf`. Dann sind auch Integrale berechenbar, die symbolisch es nicht waren.

↪ numerische Approximation von Integralen

(siehe “Einführung in die Numerik”)

Bestimmte Integrale und `evalf`

```

Text Math C 2D Math Lucida Bright 12 B U
Bestimmte Integrale:
int(cos(x), x = a..b);
                                -sin(a) + sin(b) (1)

int(sin, a..b);
                                cos(a) - cos(b) (2)

F := int(cos(x), x); subs(x = b, F) - subs(x = a, F);
                                F := sin(x)
                                -sin(a) + sin(b) (3)

Bestimmte Integrale mit Zahlen:
int(exp(-x^2) * ln(x), x = 0..1);
                                 $\int_0^1 e^{-x^2} \ln(x) dx$  (4)

evalf(%);
                                -0.9059404763 (5)

```

Grenzwerte mit Maple berechnen

Zur Bestimmung von Grenzwerten gibt es den Befehl `limit`:

$$\text{limit}(f(x), x=a, \text{dir}) \hat{=} \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Parameters

`f` - algebraic expression

`x` - name

`a` - algebraic expression; limit point, possibly infinity, or -infinity

`dir` - (optional) symbol; direction chosen from:

left, right, real, or complex

Beispiele:

- Grenzwert von $\sin(x)/x$ für $x \rightarrow 0$ (via l'Hospital):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

Maple: `limit(sin(x)/x, x=0);`

- Grenzwert von e^x für $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

Maple: `limit(exp(x), x=infinity);`

Rechnen mit Matrizen

Zusatzpaket: `with (LinearAlgebra) :`

- Definition von Matrizen: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
 - `A := <<1, 3> | <2, 4>>;`
 - `A := Matrix(2, 2, [1, 2, 3, 4]);`
 - `A := Matrix(2, 2, [[1, 2], [3, 4]]);`
- Element der Matrix: `A[1, 2];`
- Definition von Vektoren: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}^T$:
 - `<5, 6>;`
 - `Vector([5, 6]);`

Rechnen mit Matrizen

- Multiplikation (**$\mathbf{A}b$**): `A.b;` oder `Multiply(A,b);`
- Inverse Matrix: `A^(-1);` oder `MatrixInverse(A);`
- Determinant: `Determinant(A);`
- Transponiert: `Transpose(A);`
- Spur: `Trace(A);`

Lineare Algebra und Geometrie mit Maple

Das Zusatzpaket `VectorCalculus` stellt einige Zusatzbefehle zur Behandlung von Vektoren zur Verfügung. Eine kleine Auswahl:

- Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Dabei seien $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ die Koeffizienten bzgl. der Einheitsbasis.

Entsprechung in Maple: `DotProduct(a, b)`.

Beispiel:

```
with(VectorCalculus) :  
DotProduct(<a1,a2>, <b1,b2>);
```

Lineare Algebra und Geometrie mit Maple

- Norm („Betrag“) eines Vektors \vec{a} der Dimension n :

$$\|\vec{a}\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |a_i|^p}$$

für $p < \infty$ bzw.

$$\|\vec{a}\|_\infty := \max_{p=1,\dots,n} |a_i|$$

Entsprechung in Maple: `Norm(a, p)`.

Beispiele:

- Euklidischer Abstand ($p = 2$):

`Norm(<1, 0, 1>, 2)`

- Maximum-Norm ($p = \infty$):

`Norm(<-3, 0, 1, 2>, infinity);`

Lineare Algebra und Geometrie mit Maple

Lösen eines linearen Gleichungssystems:

$$\mathbf{V}\vec{b} = \vec{a}$$

mit einer Matrix $\mathbf{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

Realisierung in Maple:

```
with(LinearAlgebra) :  
a:=<a1,a2>;  
v1:=<1,1>;  
v2:=<0,1>;  
V:=<v1|v2>;  
LinearSolve(V,a);
```