Mathematik am Computer

Maple, Teil I

Marcus Grote und Helmut Harbrecht

Universität Basel

4. – 8. Dezember 2023

Übersicht

Maple 2020

Maple ist eine Mathematiksoftware für Algebra, Analysis, Numerik und viele andere mathematische Anwendungen.

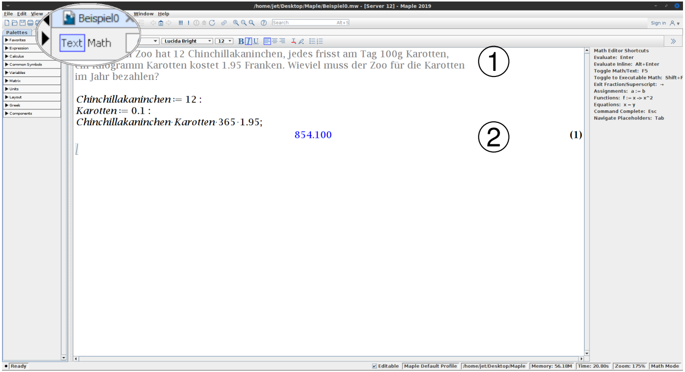
Document: Um Dokumente zu erstellen, die eine Mischung aus Text und Maple-Programmen beinhalten können.

Worksheet: Um in Maple zu programmieren.

How do I choose?

$\rightarrow$ Mehr Informationen zu den Unterschieden.

Maple 2020



① **Text-Modus:** Reintext, Kommentare, Überschriften, etc.

② **Mathe-Modus:** Formel, Definitionen, Kommandos, etc.

Grundsätzliches zu Maple-Kommandos

- Die „ergibt"-Anweisung wird als **:=** geschrieben.
- Das Gleichheitszeichen **=** ist Vergleichsoperationen vorbehalten.
- Kommandos werden in einem Befehlsblock beendet/getrennt voneinander mit
  - Semikolon **;** : das Ergebnis wird angezeigt.
    `var:=Wert oder arithmetischer Ausdruck;`
  - Doppelpunkt **:**: der Befehl wird ohne Anzeige durchgeführt.
    `var:=Wert oder arithmetischer Ausdruck:`

Beispiel: Ein Zoo hat 12 Chinchillakaninchen, jedes frisst am Tag 100g Karotten, ein Kilogramm Karotten kostet 1.95 Franken. Wieviel muss der Zoo für die Karotten im Jahr bezahlen?

```
Chinchillakaninchen := 12:
Karotten := 0.1:
Chinchillakaninchen*Karotten*365*1.95;
```

ergibt 854.10.

Symbolisches Rechnen: Begriffsklärung

- Was bedeutet „Symbolisches Rechnen“?
  Rechnen mit Variablen und höchstens teilweise mit konkreten Zahlen.
- Ursprünge von Maple: „Formelmanipulation“, Umformung von Ausdrücken am Computer.

Darstellung von Funktionen

Text Math | C 2D Math | Lucida Bright | 12

Es gibt verschiedene Möglichkeiten:

- Variante 1 – als einfache Ergibtanweisung:

  f(x) := "Ausdruck mit x";

Beispiel: $f(x) := x^2 \ln(x);$

$$f(x) := x^2 \ln(x) \qquad (1)$$

- Variante 2 – Darstellung als funktionaler Zusammenhang:

  f := x-> "Ausdruck mit x";

Beispiel: $f := x \rightarrow x^2 \ln(x);$

$$f := x \mapsto x^2 \ln(x) \qquad (2)$$

Symbolisches Rechnen: Ausdrücke vereinfachen

Oftmals ist Maple „unwillig", Ausdrücke so zu vereinfachen und darzustellen, wie wir es gewöhnt sind.

Beispiel: Der Aufruf von `diff(x^a,x)` ergibt leider

$$\frac{x^a a}{x}$$

Ausweg: Der Aufruf von `simplify(diff(x^a,x))` ergibt:

$$x^{a-1} a$$

Alternatives Vorgehen:

```
result:=diff(x^a,x);
simplify(result);
```

oder

```
diff(x^a,x);
simplify(%);
```

Das Prozentzeichen **%** ist der „Dito-Operator" und verweist auf das zuletzt berechnete Ergebnis.

```
%   last expression
%%  second last expression
%%% third last expression
```

Symbolisches Rechnen: Ausdrücke vereinfachen

Text Math | 2D Math | Lucida Bright | 12

(partielle) Ableitung:

$diff(x^a, x);$

$$\frac{x^a\, a}{x} \tag{1}$$

$simplify(diff(x^a, x));$

$$x^{a-1}\, a \tag{2}$$

Weitere Beispiele:

- Taschenrechnermodus:

$simplify(\mathrm{sqrt}(8)-2);$

$$2\sqrt{2}-2 \tag{3}$$

- Vereinfachung trigonometrischer Funktionen:

$simplify(\sin(x)^2+\cos(x)^2);$

$$1 \tag{4}$$

- Definition von tan(x):

$simplify\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\tan(x)\right);$

$$0 \tag{5}$$

Anwendung von `evalf`

Berechne:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{7};$

$$\frac{10}{21} \qquad (1)$$

$evalf(\%);$

$$0.4761904762 \qquad (2)$$

Bestimmen von π: (Die Eingabe von Pi bringt π und nicht 3.14...)

Pi;

$$\pi \qquad (3)$$

$evalf(\mathrm{Pi});$

$$3.141592654 \qquad (4)$$

Bestimmen von e:

$\exp(1);$

$$e \qquad (5)$$

$evalf(\exp(1));$

$$2.718281828 \qquad (6)$$

Anzahl der Stellen:

$Digits := 14:$

$evalf(\mathrm{sqrt}(3));$

$$1.7320508075689 \qquad (7)$$

$evalf[14](\mathrm{sqrt}(3));$

$$1.7320508075689 \qquad (8)$$

Berechnung von Summen

Symbolisches Berechnen von Summen (`?sum` ruft die Maple Hilfe zum Befehl `sum` auf):

$$\texttt{sum(f, k=m..n)} \mathrel{\hat{=}} \sum_{k=m}^{n} f_k$$

Beispiele:

Text Math | 2D Math | Lucida Bright | 12

Berechnung von Summen:

$sum(1, k = m..n);$

$$n + 1 - m \qquad (1)$$

$sum(p, k = 1..n);$

$$n\,p \qquad (2)$$

$sum(k, k = 1..n);$

$$\frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \qquad (3)$$

$simplify(\%);$

$$\frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{2}\,n \qquad (4)$$

Lösen von Gleichungen

Lösen von Gleichungen (`?solve`):

Lösen von Gleichungen:

```
solve(a*x + b = 0, x);
```

$$-\frac{b}{a} \qquad (1)$$

```
solve(a*x + b = 0, a);
```

$$-\frac{b}{x} \qquad (2)$$

```
solve(cos(x) = 0);
```

$$\frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

```
solve(a*x^2 + b*x + c = 0, x);
```

$$\frac{-b+\sqrt{-4\,a\,c+b^2}}{2\,a},\ -\frac{b+\sqrt{-4\,a\,c+b^2}}{2\,a} \qquad (4)$$

```
solve(x^3-2*x^2-x+2);
```

$$1,\ 2,\ -1 \qquad (5)$$

```
solve([3*x-y=-5, 2*x+3*y=4], [x, y]);
```

$$[[x=-1,\ y=2]] \qquad (6)$$

Lösen von Gleichungen

Maple schreibt bei manchen Rechnungen die Ergebnisse mit der Funktion `RootOf` auf. Die expliziten Lösungen können mit dem Befehl `allvalues` angezeigt werden.
Manchmal wird aber `RootOf` auch benutzt, bei Gleichungen für die Maple keine Lösung hinschreiben kann.

Text | Nonexecutable Math | Math | 2D Math | Times New Roman | 12

$$sol1 := solve\left(\left[x^2+y^2-3=0,\ (y+1)^2-x-1=0\right],\ [x,y]\right)$$

$$sol1 := \left[\left[x=-RootOf\left(\_Z^2+3\_Z+3\right)-3,\ y=RootOf\left(\_Z^2+3\_Z+3\right)\right],\ \left[x=RootOf\left(\_Z^2+\_Z-1\right)+1,\ y=RootOf\left(\_Z^2+\_Z-1\right)\right]\right] \quad \textbf{(1)}$$

$$allvalues(sol1)$$

$$\left[\left[\left[x=-\frac{3}{2}-\frac{I\sqrt{3}}{2},\ y=-\frac{3}{2}+\frac{I\sqrt{3}}{2}\right],\ \left[x=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2},\ y=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right]\right],\ \left[\left[x=-\frac{3}{2}-\frac{I\sqrt{3}}{2},\ y=-\frac{3}{2}+\frac{I\sqrt{3}}{2}\right],\ \left[x=-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2},\ y=-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right]\right],\ \left[\left[x=-\frac{3}{2}+\frac{I\sqrt{3}}{2},\ y=-\frac{3}{2}-\frac{I\sqrt{3}}{2}\right],\ \left[x=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2},\ y=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right]\right],\ \left[\left[x=-\frac{3}{2}+\frac{I\sqrt{3}}{2},\ y=-\frac{3}{2}-\frac{I\sqrt{3}}{2}\right],\ \left[x=-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2},\ y=-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right]\right]\right] \quad \textbf{(2)}$$

$$sol2 := solve\left(a\cdot x^5+b\cdot x^4+c\cdot x^3+d\cdot x^2+e\cdot x+f=0,\ x\right)$$

$$sol2 := RootOf\left(a\_Z^5+b\_Z^4+c\_Z^3+d\_Z^2+e\_Z+f\right) \quad \textbf{(3)}$$

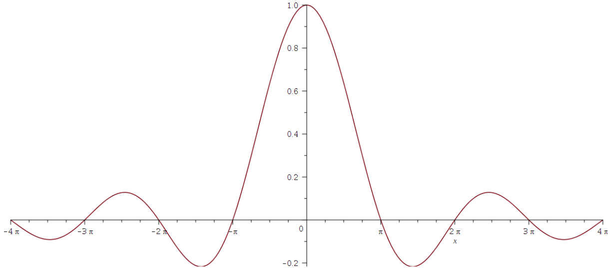
Visualisierung von Kurven

Variante 1: Gegeben sei eine (explizite) Funktion y=f(x).

```
plot(f, x);
plot(f, x=x0..x1);
```

```
Parameters
f  - expression in independent variable x
x  - independent variable
x0 - left endpoint of horizontal range
x1 - right endpoint of horizontal range
```

Beispiel: `plot(sin(x)/x,x=-4*Pi..4*Pi);`



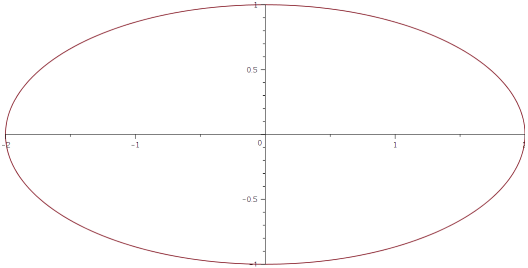
Visualisierung von Kurven

Variante 2: Gegeben sei eine Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$.

```
plot([x(t),y(t),t=range of t],
    h,v,options);
```

```
Parameters
[x,y,range] - parametric
              specifications
h           - horizontal range
v           - vertical range
options     - (optional)
               plot options;
               see plot/options
```

Beispiel: `plot([2*cos(t),sin(t),t=0..2*Pi]);`

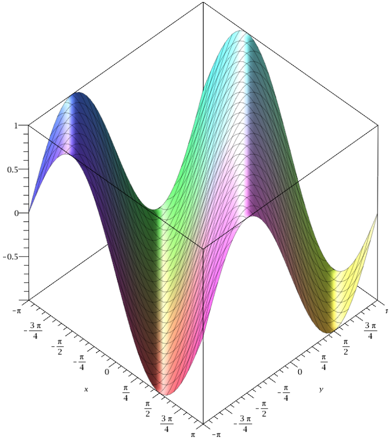


Visualisierung von Flächen

Gegeben sei eine Darstellung einer Fläche durch $f(x, y)$.

```
plot3d(expr, x=a..b, y=c..d);
```

Beispiel: `plot3d(sin(x+y),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi);`



MATLAB-Funktion `unique`

Die MATLAB-Funktion `unique` kann benutzt werden um den Vektor zu bestimmen, der die Einträge ohne Wiederholung einer Matrix enthält.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

In Matlab:

```
vec = unique(A)
```

Der Vektor `vec` hat damit die Einträge:

```
vec = [ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ]
```

MATLAB-Funktion `find`

Die MATLAB-Funktion `find` kann benutzt werden um die Position von Einträgen einer Matrix zu finden, die eine gewisse Bedingung erfüllen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

In Matlab:

```
[row, col] = find(A == 3)
```

Die Vektoren `row` und `col` haben damit die Einträge:

```
row = [ 5 ; 3 ; 3 ; 3 ; 1 ]
col = [ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ]
```

MATLAB-Funktion `rot90`

Die MATLAB-Funktion `rot90` kann benutzt werden um eine Matrix ein vielfaches von 90 Grad im Gegenuhrzeigersinn zu rotieren.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

In Matlab:

```
B1 = rot90(B)
B2 = rot90(B,2)
B3 = rot90(B,3)
```

Die Matrizen `B1`, `B2` und `A3` haben damit die Einträge:

$$B1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$