UNIVERSITÄT BASEL

Einführung in die Optimierung

Frühjahrsemester 2011

Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 8.

zu bearbeiten bis **Mittwoch, 4.5.2011**.

Aufgabe 1. (Levenberg-Marquardt-Verfahren I)

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sowie $\lambda > 0$. Ferner sei $\mathbf{d}$ die Lösung von $(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I})\mathbf{d} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ und $\mathbf{g}$ die Lösung von $(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I})\mathbf{g} = \mathbf{d}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{d}$ und $\mathbf{g}$ die linearen Ausgleichsprobleme

$$\min_{\mathbf{d}\in\mathbb{R}^n} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \sqrt{\lambda}\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{d} - \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|_2 \quad \text{und} \quad \min_{\mathbf{g}\in\mathbb{R}^n} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \sqrt{\lambda}\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{g} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d}/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \right\|_2$$

lösen.

b) Nehmen Sie an, dass die QR-Zerlegung $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{Q}}\widetilde{\mathbf{R}}$ mit rechter oberer Dreiecksmatrix $\widetilde{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und orthogonaler Matrix $\widetilde{\mathbf{Q}}$ vorliegt. Mit Hilfe von (orthogonalen) Givensrotationen der Gestalt

$$\mathbf{G}_{i,j}(c,s) := \left[\begin{array}{ccc|ccccc|ccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & c & & & & s & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & -s & & & & c & & & \\
\hline
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

lässt sich nun die QR-Zerlegung der Block-Matrix

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{R}} \\ \sqrt{\lambda}\mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$$

wie folgt berechnen: Für die Wahl

$$c = \frac{a_{i,k}}{\sqrt{a_{i,k}^2 + a_{j,k}^2}} \quad \text{und} \quad s = \frac{a_{j,k}}{\sqrt{a_{i,k}^2 + a_{j,k}^2}}$$

wird bei der Transformation einer Matrix $\mathbf{A}$, das heisst $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{G}_{i,j}(c,s)\mathbf{A}$, genau der Eintrag in (j,k)-Position auf 0 gesetzt. Durch sukzessive Anwendung dieser Idee, lässt sich nun die QR-Zerlegung einer Matrix bestimmen.

Zeigen Sie, dass zur Berechnung der QR-Zerlegung

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{R}} \\ \sqrt{\lambda}\mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{QR}$$

genau $n(n+1)/2$ Givens-Rotationen benötigt werden und der Gesamtaufwand $\mathcal{O}(n^3/3)$ (Multiplikationen) beträgt.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Levenberg-Marquardt-Verfahren II)

Bestimmen Sie für die Rosenbrock-Funktion

$$f(x_1, x_2) := 100(x_2 - x_1^2)^2 + (x_1 - 1)^2$$

ausgehend von $\mathbf{x}_0 = [0, -0.001]^T$ die neue Suchrichtung $\mathbf{d}_0$ des Levenberg-Marquardt-Verfahrens zu den Trust-Region-Radien a) $\Delta_0 = 1$, b) $\Delta_0 = 0.5$, c) $\Delta_0 = 0.25$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Gauss-Newton-Verfahren)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch die Summe zweier Sinusschwingungen, nämlich

$$f(t) = \sin(t + \phi) + \sin(2t + \psi).$$

Die Parameter $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ sind zu bestimmen. Hierzu werden für $t_1 < t_2 < t_3$ die Werte $f(t_1) = f_1, f(t_2) = f_2$ und $f(t_3) = f_3$ angenommen.

a) Stellen Sie das entsprechende, nichtlineare Ausgleichsproblem zur Bestimmung von ϕ und ψ auf und geben Sie die Iterationsvorschrift des Gauss-Newton-Verfahrens zur Lösung dieses Problems an.

b) Führen Sie die ersten beiden Schritte des Iterations-Verfahrens für die Datenpunkte

i	1	2	3
t_i	0	$\pi/2$	π
f_i	1	1	-1

und die Startnäherungen $\phi_0 = \psi_0 = 0$ aus.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Lineare Optimierung unter Nebenbedingungen)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit Rang $n \leq m$ sowie $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

a) Es gelte

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ die Normalengleichung $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ erfüllt. Welcher Grösse entspricht hierbei der Vektor $\boldsymbol{\lambda}$?

b) Sei nun ferner $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ eine Matrix mit Rang $p < n$ und $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$. Gesucht ist die Lösung $\mathbf{x}^\star$ des (restringierten) Ausgleichsproblems

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 \to \min \quad \text{unter der Nebenbedingung } \mathbf{Cx} = \mathbf{d}.$$

Zeigen Sie, dass die Lösung dieses Problems gerade der Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

entspricht.

(4 Punkte)