Übungsblatt 7.

zu bearbeiten bis **Mittwoch, 27.4.2011**.

Aufgabe 1. (Hebden-Verfahren)

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, streng monoton wachsend und konkav mit eindeutiger Nullstelle $x^\star \in I$. Zeigen Sie, dass dann das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung für alle Startwerte $x_0 \in I$ mit $x_0 \leq x^\star$ monoton gegen $x^\star$ konvergiert.

b) Betrachten Sie die Gleichung

$$r(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{(d_i + x)^2} = \rho$$

mit z_i und d_i positiv für alle $i = 1, \ldots, n$ und $\rho > 0$. Ferner gelte $d_i > d_{i+1}$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ und $r(0) > \rho$. Zur Lösung der Gleichung mit dem Hebden-Verfahren wird das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung auf die umgeformte Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{r(x)}} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} = 0$$

angewendet. Zeigen Sie, dass das Hebden-Verfahren für den Startwert $x_0 = 0$ konvergiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Gauss-Newton-Verfahren)
Betrachten Sie die Funktion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben via

$$F(x) = \begin{bmatrix} x + 1 \\ \lambda x^2 + x - 1 \end{bmatrix}$$

und das zugehörige Minimierungsproblem $\psi(x) := \|F(x)\|_2^2 \to \min$. Zeigen Sie:

a) Für $\lambda \in (-\infty, 1)$ ist $x^\star = 0$ ein lokales Minimum von $\psi(x)$ und für $\lambda < 7/16$ sogar das einzige.

b) Formulieren Sie das Gauss-Newton-Verfahren als Fixpunktverfahren $x_{k+1} = g(x_k)$. Für $\lambda < -1$ ist die Lösung $x^\star = 0$ ein abstossender Fixpunkt, das heisst, in einer Umgebung von 0 gilt $|x_{k+1} - 0| \geq |x_k - 0|$ für alle $x_k \neq 0$.

c) Für $|\lambda| < 1$ ist das Gauss-Newton-Verfahren konvergent. Welche Konvergenzordnung liegt in diesem Fall vor?

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (CG-Verfahren)

Das Fletcher-Reeves-Verfahren werde mit inexakter Liniensuche durchgeführt, wobei die Schrittweite α_k der Wolfe-Bedingung

$$|\nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k)^T \mathbf{d}_k| \leq \gamma |\nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k|$$

mit $0 < \gamma < 0.5$ genüge. Zeigen Sie, dass dann für die Suchrichtungen gilt:

$$\frac{1-2\gamma}{1-\gamma} \leq -\frac{\nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k}{\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|_2^2} \leq \frac{1}{1-\gamma} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Levenberg-Marquardt-Regularisierung)

Betrachten Sie die Levenberg-Marquardt-Regularisierung des Newton-Verfahrens für konvexe Funktionen:

Algorithmus

Wähle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in (0, 0.5)$.

Für $k = 0, 1, \ldots$:

1. Falls $\nabla f(\mathbf{x}_k) = 0$ gilt, STOP.
2. Berechne $\mathbf{d}_k$ durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$(\nabla^2 f(\mathbf{x}_k) + \lambda_k \mathbf{I}) \mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k).$$

   mit $\lambda_k \geq 0$.
3. Bestimme die Schrittweite α_k nach der Armijo-Regel.
4. Setze $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$.

Sei nun $f \in C^2$ eine konvexe Funktion und $\lambda_k = \rho(\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|_2)$ mit einer stetigen, monoton wachsenden Funktion $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $\rho(0) = 0$ und $\rho(x) > 0$ für $x > 0$ erfüllt.

a) Zeigen Sie, dass die durch den Algorithmus erzeugten Suchrichtungen $\nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k < 0$ erfüllen.

b) Sei $\{\mathbf{x}_{k_l}\}_{l \geq 0}$ eine konvergente Teilfolge. Zeigen Sie, dass für die zugehörigen Teilfolgen $\{\mathbf{d}_{k_l}\}_{l \geq 0}$ und $\{\alpha_{k_l}\}_{l \geq 0}$

$$\frac{\nabla f(\mathbf{x}_{k_l})^T \mathbf{d}_{k_l}}{\|\mathbf{d}_{k_l}\|_2} \stackrel{l \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla f(\mathbf{x}_{k_l}) \stackrel{l \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

sowie

$$f(\mathbf{x}_{k_l}) - f(\mathbf{x}_{k_l} + \alpha_{k_l} \mathbf{d}_{k_l}) \stackrel{l \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\nabla f(\mathbf{x}_{k_l})^T \mathbf{d}_{k_l}}{\|\mathbf{d}_{k_l}\|_2} \stackrel{l \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt.

c) Sei $\mathbf{x}^\star$ ein Minimum von f mit $\nabla^2 f(\mathbf{x}^\star)$ regulär. Zeigen Sie, dass dann ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}^\star)$ und alle $\alpha \in (0, 1]$ die Armijo-Bedingung

$$f(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}) - f(\mathbf{x}) \leq \sigma \alpha \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}$$

erfüllt ist.

d) Sei $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 0}$ eine durch den Algorithmus erzeugte Folge, die gegen ein Minimum $\mathbf{x}^\star$ von f konvergiert, in dem die Hesse-Matrix regulär ist. Zeigen Sie, dass dann ein Index $l \geq 0$ existiert, so dass für alle $k \geq l$ das Verfahren immer die Schrittweite 1 wählt und die Folge $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 0}$ superlinear gegen $\mathbf{x}^\star$ konvergiert.

(4 Punkte)