UNIVERSITÄT BASEL
Einführung in die Optimierung
Frühjahrsemester 2011
Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 1.

zu bearbeiten bis **Mittwoch, 2.3.2011**.

Aufgabe 1. (Nachweis von Konvexität)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Exponentialfunktion $f(x) := \exp(x)$ ist strikt konvex auf $\mathbb{R}$, dort aber nicht gleichmäßig konvex.

(b) Die Parabel $f(x) := x^2$ ist gleichmäßig konvex auf $\mathbb{R}$.

(c) Die Funktion $f(x) := x^4$ ist zwar strikt konvex auf $\mathbb{R}$, aber nicht gleichmäßig konvex.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Komposition konvexer Funktionen)

Sei $g : D \to \mathbb{R}$ konvex auf der konvexen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Weiter sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $g(D) \subset I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe und monoton wachsende Funktion. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $f \circ g : \mathbf{x} \in D \mapsto f\big(g(\mathbf{x})\big) \in \mathbb{R}$ konvex ist. Folgern Sie hieraus, dass für eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^n$ die Funktion $h(\mathbf{x}) := \|x\|^2$ konvex ist.

Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass auf das monotone Wachstum von f im allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (quadratische Funktionen)

Eine quadratische Funktion sei durch

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$$

gegeben mit einer quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann davon ausgegangen werden, dass $\mathbf{A}$ symmetrisch ist.

(b) Zeigen Sie, dass für den Gradienten $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ und für die Hessematrix $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ gilt.

(c) Sei $\mathbf{A}$ positiv definit und $\mathbf{x}^\star := -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}^\star$ das strikte globale Minimum von f ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Kompaktheit und Konvexität)

Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $D \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe und beschränkte Menge. Man beweise die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(a) f ist gleichmäßig konvex auf D.

(b) Es existieren Konstanten $\underline{c} > 0$ und $\overline{c} > 0$ mit

$$\underline{c}\|\mathbf{d}\|_2^2 \leq \mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{d} \leq \overline{c}\|\mathbf{d}\|_2^2$$

für alle $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\mathbf{x} \in D$.

Man überlege sich, ob diese beiden Aussagen auch äquivalent sind zu

(c) f ist strikt konvex auf D.

(4 Punkte)