



## Übungsblatt 8.

Abgabe bis: Montag, 29.04.2024, 14:15 Uhr

### Aufgabe 1 (Kubische Spline-Interpolation | 4 Punkte).

Bestimmen Sie die Koeffizienten des kubischen Splines  $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$s(t) = \sum_{j=-1}^3 c_j B_3\left(\frac{t - x_j}{h}\right)$$

durch die Stützpunkte

$j$	0	1	2
$x_j$	0	0.5	1
$y_j$	3	4	5

- (a) mit den natürlichen Randbedingungen  $s''(0) = s''(1) = 0$ .
- (b) mit den Hermite-Randbedingungen  $s'(0) = 10$ ,  $s'(1) = -2$ .

### Aufgabe 2 (Quadratische Spline-Interpolation | 4 Punkte).

Auf dem Intervall  $[0, 4]$  sei durch

$$s(x) = \sum_{j=-1}^5 c_j B_2(x - j)$$

ein 4-periodischer (also  $c_{-1} = c_3$ ,  $c_0 = c_4$ ,  $c_1 = c_5$ ), quadratischer Spline gegeben zum Gitter  $\Delta = \{1/2, 3/2, 5/2, 7/2\}$ . Stellen Sie das Gleichungssystem für die Koeffizienten dieses Splines auf, damit er gegebene Daten  $y_k$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,

- (a) in den Stützstellen  $(k + 1/2, y_k)$  interpoliert bzw.
- (b) in den Stützstellen  $(k, y_k)$  interpoliert.

Zeigen Sie, dass im ersten Fall die resultierende Systemmatrix singulär wird.

### Aufgabe\* 3 (Periodische Spline-Quadratur | 4 Punkte).

- (a) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\frac{m+1}{2}}^{\frac{m+1}{2}} B_m(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} B_m(x) dx = 1, \quad \text{für } m \in \mathbb{N}_0.$$

- (b) Sei nun  $s(x) = \sum_{j=-k}^{n+k} c_j B_m(x - j)$  der  $n$ -periodische Spline durch die Stellen  $(j, y_j)$ ,  $j = 0, \dots, n-1$  der Ordnung  $m$ , wobei  $k := \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  ist und  $n \geq 2k + 1$  erfüllt. Insbesondere gelten  $c_0 = c_n$  und  $c_{-j} = c_{n-j}$  und  $c_j = c_{n+j}$  für alle  $j = 1, \dots, k$ .

Schliessen Sie, dass

$$\int_0^n s(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} c_j.$$

**Aufgabe\* 4** (Punktweise Abschätzung | 4 Punkte).

Sei  $f \in C^2([a, b])$  und  $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$  mit  $x_i = a + ih$ ,  $h := (b - a)/n$ . Zeigen Sie für den linearen Spline  $s \in S_1(\Delta)$ , welcher die Funktion  $f$  an den Stützstellen  $x_i$  interpoliert, folgende Abschätzung

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_{C([a, b])}, \quad \forall x \in [a, b].$$

**Programmieraufgabe 5** (Splines nach Mansfield, Cox & de Boor | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Bitte reichen Sie Ihre Lösung der Programmieraufgabe als komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM ein, wobei Sie dem Dateinamen Ihren Namen hinzufügen. **Zusätzlich heften Sie bitte der Theorieabgabe einen Ausdruck der exportierten pdf-Datei an.**