



Übungsblatt 8.

Abgabe bis: Montag, 29.04.2024, 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (Kubische Spline-Interpolation | 4 Punkte).

Bestimmen Sie die Koeffizienten des kubischen Splines $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$s(t) = \sum_{j=-1}^3 c_j B_3 \left(\frac{t - x_j}{h} \right)$$

durch die Stützpunkte

j	0	1	2
x_j	0	0.5	1
y_j	3	4	5

- (a) mit den natürlichen Randbedingungen $s''(0) = s''(1) = 0$.
- (b) mit den Hermite-Randbedingungen $s'(0) = 10, s'(1) = -2$.

Aufgabe 2 (Quadratische Spline-Interpolation | 4 Punkte).

Auf dem Intervall $[0, 4]$ sei durch

$$s(x) = \sum_{j=-1}^5 c_j B_2(x - j)$$

ein 4-periodischer (also $c_{-1} = c_3, c_0 = c_4, c_1 = c_5$), quadratischer Spline gegeben zum Gitter $\Delta = \{1/2, 3/2, 5/2, 7/2\}$. Stellen Sie das Gleichungssystem für die Koeffizienten dieses Splines auf, damit er gegebene Daten $y_k, k \in \{0, 1, 2, 3\}$,

- (a) in den Stützstellen $(k + 1/2, y_k)$ interpoliert bzw.
- (b) in den Stützstellen (k, y_k) interpoliert.

Zeigen Sie, dass im ersten Fall die resultierende Systemmatrix singulär wird.

Aufgabe* 3 (Periodische Spline-Quadratur | 4 Punkte).

- (a) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\frac{m+1}{2}}^{\frac{m+1}{2}} B_m(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} B_m(x) dx = 1, \quad \text{für } m \in \mathbb{N}_0.$$

- (b) Sei nun $s(x) = \sum_{j=-k}^{n+k} c_j B_m(x - j)$ der n -periodische Spline durch die Stellen (j, y_j) , $j = 0, \dots, n - 1$ der Ordnung m , wobei $k := \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ ist und $n \geq 2k + 1$ erfüllt. Insbesondere gelten $c_0 = c_n$ und $c_{-j} = c_{n-j}$ und $c_j = c_{n+j}$ für alle $j = 1, \dots, k$.

Schliessen Sie, dass

$$\int_0^n s(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} c_j.$$

Aufgabe* 4 (Punktweise Abschätzung | 4 Punkte).

Sei $f \in C^2([a, b])$ und $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit $x_i = a + ih$, $h := (b - a)/n$. Zeigen Sie für den linearen Spline $s \in S_1(\Delta)$, welcher die Funktion f an den Stützstellen x_i interpoliert, folgende Abschätzung

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_{C([a,b])}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Programmieraufgabe 5 (Splines nach Mansfield, Cox & de Boor | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Bitte reichen Sie Ihre Lösung der Programmieraufgabe als komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM ein, wobei Sie dem Dateinamen Ihren Namen hinzufügen. Zusätzlich heften Sie bitte der Theorieabgabe einen Ausdruck der exportierten pdf-Datei an.