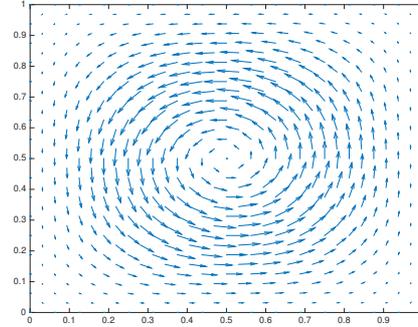
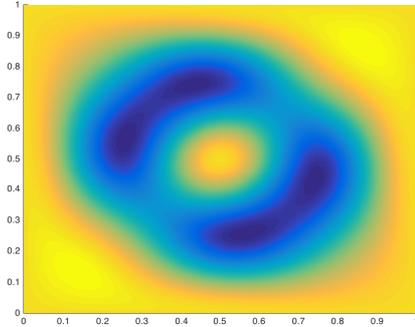


## Projekt

Abgabe bis **31.8.2016**



## Navier-Stokes-Gleichung

In diesem Projekt betrachten wir die Navier-Stokes-Gleichung

$$\begin{aligned}
 -\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) + \frac{1}{\nu}(\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla)\mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\nu}\mathbf{f}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\
 \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\
 \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Gamma := \partial\Omega.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Hierbei sind  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$  vorgegeben und wir suchen  $p \in L_0^2(\Omega)$  und  $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ , die Gleichung (1) erfüllen. Der nichtlineare Term  $(\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla)\mathbf{v}(\mathbf{x})$  heisst *Konvektionsterm* und ist definiert als  $(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla)\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Deshalb sind wir gezwungen, ein iteratives Lösungsverfahren wie das Newton-Verfahren zu benutzen, um eine Approximation an  $p$  und  $\mathbf{v}$  zu finden.

Zunächst benötigen wir jedoch die Variationsformulierung von (1). Wir machen den gleichen Ansatz wie für die Stokes-Gleichung in Programmieraufgabe 3, das heisst, wir benutzen Taylor-Hood-Elemente, um (1) zu diskretisieren, und übernehmen auch die Definitionen von dort. Zusätzlich definieren wir für  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2$  die Trilinearform  $c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  als

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \int_{\Omega} \langle (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla)\mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x}) \rangle \, d\mathbf{x}.$$

Damit lautet die schwache Formulierung von (1): Suche  $(\mathbf{v}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$ , so dass

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, p) + \frac{1}{\nu}c(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \frac{1}{\nu}\ell(\mathbf{w}), \\
 b(\mathbf{v}, q) &= 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

für alle  $(\mathbf{w}, q) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$ , wobei

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \langle \nabla\mathbf{v}, \nabla\mathbf{w} \rangle \, d\mathbf{x}, \quad b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v})q \, d\mathbf{x}, \quad \ell(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle \, d\mathbf{x}.$$

## Reformulierung

Um das Newton-Verfahren anwenden zu können, ist es hilfreich, (2) durch ein Funktional auszudrücken, um dann die Fréchet-Ableitung des Funktionals zu bestimmen. Hierzu bezeichnen wir mit  $T \in \mathcal{L}([H^{-1}(\Omega)]^2, [H_0^1(\Omega)]^2)$  den *Stokes-Operator*, der jedem  $\mathbf{f}^* \in [H^{-1}(\Omega)]^2$  die eindeutige Lösung  $\mathbf{v} := T\mathbf{f}^* \in [H_0^1(\Omega)]^2$  des Stokes-Problems mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, p) &= \int_{\Omega} \langle \mathbf{f}^*, \mathbf{w} \rangle \, dx \quad \text{für alle } \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2, \\ b(\mathbf{v}, q) &= 0 \quad \text{für alle } q \in L_0^2(\Omega), \end{aligned}$$

zuordnet. Weiter definieren wir die stetige Abbildung  $G : [H_0^1(\Omega)]^2 \rightarrow [H^{-1}(\Omega)]^2$  gemäss

$$(G(\mathbf{v}), \mathbf{w})_{L_0^2(\Omega)} := c(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - \int_{\Omega} \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle \, dx \quad \text{für alle } \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2.$$

Nun können wir (2) umschreiben in: Finde  $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$  mit

$$F(\mathbf{v}) := \mathbf{v} + \frac{1}{\nu} T G(\mathbf{v}) = 0. \quad (3)$$

Die Fréchet-Ableitung von  $F$  in Richtung  $\mathbf{w}$  lautet

$$\delta F(\mathbf{v})[\mathbf{w}] = \mathbf{w} + \frac{1}{\nu} T((\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w}).$$

Das Newton-Verfahren zur Lösung von (3) zu einem Startwert  $(\mathbf{v}_0, p_0)$  lautet damit

$$\delta F(\mathbf{v}_i)[\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i] = F(\mathbf{v}_i), \quad i = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

was äquivalent ist zu folgendem Verfahren:

Bestimme einen Startwert  $(\mathbf{v}_0, p_0) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$  und berechne für alle  $i = 0, 1, \dots$  die Lösung  $(\mathbf{v}_{i+1}, p_{i+1})$  der modifizierten Stokes-Probleme

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, p_{i+1}) + \frac{1}{\nu} c(\mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}) + \frac{1}{\nu} c(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{w}) &= \frac{1}{\nu} \ell(\mathbf{w}) + \frac{1}{\nu} c(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}), \\ b(\mathbf{v}_{i+1}, q) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

wobei  $(\mathbf{w}, q) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$  gelte.

## Implementierung

Für die Diskretisierung von (5) verwenden wir, wie bei der Stokes-Gleichung, das Taylor-Hood-Element mit den Basisfunktionen (siehe Programmieraufgabe 3)

$$\varphi_i(x) = \begin{pmatrix} N_i(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1, \dots, 6 \quad \text{und} \quad \varphi_i(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{i-6}(x) \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 7, \dots, 12.$$

Das zugehörige Gleichungssystem hat die Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{C}_1(\mathbf{v}_i) + \mathbf{C}_2(\mathbf{v}_i) & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{i+1} \\ \mathbf{p}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} + \mathbf{C}_3(\mathbf{v}_i) \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} \quad (6)$$

wobei  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{f}$  und  $\mathbf{g}$  dieselben Matrizen wie in Programmieraufgabe 4 sind. Die Matrizen  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$  und  $\mathbf{C}_3$  entstehen aus der Trilinearform  $c$  und berechnen sich wie folgt:

Wir ersetzen  $\mathbf{w}$  in (4) durch die  $j$ -te Basisfunktion  $\varphi_j$ , womit wir zum Beispiel für  $c(\mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{v}_i, \varphi_j)$  auf einem Dreieck  $T$  erhalten:

$$\begin{aligned}
c(\mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{v}_i, \varphi_j) &= \int_T \varphi_j^\top \nabla \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i+1} \, d\mathbf{x} \\
&= \int_T \varphi_j^\top \nabla \mathbf{v}_i \sum_{k=1}^{12} \mathbf{v}_{i+1,k} \varphi_k \, d\mathbf{x} \\
&= \sum_{k=1}^{12} \mathbf{v}_{i+1,k} \int_T \varphi_j^\top \nabla \mathbf{v}_i \varphi_k \, d\mathbf{x} \\
&= \sum_{k=1}^{12} \mathbf{v}_{i+1,k} \int_{T_{\text{ref}}} \varphi_j^\top \nabla \mathbf{v}_i \mathbf{D} \varphi_k \, d\hat{\mathbf{x}}.
\end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\mathbf{D} = \frac{1}{J_T} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix},$$

wobei  $J_T = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$  und  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , die Eckpunkte des Dreiecks  $T$  sind. Damit ergibt sich für  $c(\mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{v}_i, \varphi_j)$  die Matrix  $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1(\mathbf{v}_i)$  mit den Einträgen

$$[\mathbf{C}_1]_{j,k} := \int_{T_{\text{ref}}} \varphi_j^\top \nabla \mathbf{v}_i \mathbf{D} \varphi_k \, d\hat{\mathbf{x}}.$$

Analog erhält man für  $c(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \varphi_j)$  und  $c(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i, \varphi_j)$  die Matrix  $\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2(\mathbf{v}_i)$  und den Vektor  $\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_3(\mathbf{v}_i)$  mit den Einträgen

$$[\mathbf{C}_2]_{j,k} := \int_{T_{\text{ref}}} \varphi_j^\top \nabla \varphi_k \mathbf{D} \mathbf{v}_i \, d\hat{\mathbf{x}} \quad \text{und} \quad [\mathbf{C}_3]_j := \int_{T_{\text{ref}}} \varphi_j^\top \nabla \mathbf{v}_i \mathbf{D} \mathbf{v}_i \, d\hat{\mathbf{x}}.$$

Wir berechnen diese Einträge allerdings nicht wie bisher über lokale Elementmatrizen, sondern durch eine Quadraturformel. Da in den Integralen Polynome bis zum Grad 5 vorkommen, benutzen wir die 7-Punkt-Radon-Quadraturformel, um sie exakt zu auswerten. Diese Quadraturformel hat die folgenden Stützpunkte  $\xi_i$  und Gewichte  $w_i$ :

$\xi_i$	$w_i$
$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{9}{80}$
$\left(\frac{6+\sqrt{15}}{21}, \frac{6+\sqrt{15}}{21}\right), \left(\frac{9-2\sqrt{15}}{21}, \frac{6+\sqrt{15}}{21}\right), \left(\frac{6+\sqrt{15}}{21}, \frac{9-2\sqrt{15}}{21}\right)$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}$
$\left(\frac{6-\sqrt{15}}{21}, \frac{6-\sqrt{15}}{21}\right), \left(\frac{9+2\sqrt{15}}{21}, \frac{6-\sqrt{15}}{21}\right), \left(\frac{6-\sqrt{15}}{21}, \frac{9+2\sqrt{15}}{21}\right)$	$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}$

## Aufgabe 1

- Leiten Sie die Fréchet-Ableitung des Operators  $F$  her.
- Leiten Sie das Verfahren (5) aus dem Newton-Verfahren (4) her.

## Aufgabe 2

Implementieren Sie drei Funktionen

```
function C1 = convection_1(Pq, Fq, Bq, v_i),
```

```
function C2 = convection_2(Pq, Fq, Bq, v_i),
```

```
function C3 = convection_3(Pq, Fq, Bq, v_i),
```

die die Matrizen  $\mathbf{C}_1(\mathbf{v}_i)$  und  $\mathbf{C}_2(\mathbf{v}_i)$  sowie den Vektor  $\mathbf{C}_3(\mathbf{v}_i)$  aufstellen. Da diese Matrizen in jedem Iterationsschritt neu berechnet werden müssen, sollte Ihr Code dementsprechend effizient sein. Benutzen Sie daher keine `for`-Schleifen, die über jedes einzelne Element iterieren!

## Aufgabe 3

Testen Sie Ihre Implementierung in dem Gebiet  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  mit der rechten Seite

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1(x, y) \\ \mathbf{f}_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi \sin(2\pi y) (\cos(2\pi x) - 2\pi^2 \cos(2\pi x) + \pi^2) \\ 2\pi \sin(2\pi x) (\cos(2\pi y) + 2\pi^2 \cos(2\pi y) - \pi^2) \end{pmatrix}$$

und homogenen Dirichlet-Randbedingungen sowie  $\nu = 1$ . Die Iteration soll abgebrochen werden, sobald

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{i+1} \\ \mathbf{p}_{i+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{p}_i \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{p}_i \end{pmatrix} \right\|} < 10^{-6}.$$

Plotten Sie die Lösung auf Level 7. Fertigen Sie Konvergenz-Plots für die Fehler  $\|v_1^{\text{ref}} - v_{h,1}\|_{H^1(\Omega)}$ ,  $\|v_2^{\text{ref}} - v_{h,2}\|_{H^1(\Omega)}$  und  $\|p^{\text{ref}} - p_h\|_{L^2(\Omega)}$  auf den Levels 2 bis 7 an. Plotten Sie ausserdem die theoretische Konvergenzrate  $h$ . Da für die gegebenen Daten keine analytische Lösung vorhanden ist, müssen wir uns mit numerischen Referenzlösungen  $v_1^{\text{ref}}$ ,  $v_2^{\text{ref}}$  und  $p^{\text{ref}}$  auf einem sehr feinen Netz begnügen. Diese können Sie auf der Website des Projekts in der Datei `reference_solution.mat` finden. Benutzen Sie ausserdem die in `all_fe_grids.mat` beiliegenden FE-Gitter für Ihre Berechnungen.

**Hinweis.** Sobald Sie die Datei `all_fe_grids.mat` in Matlab geladen haben, finden Sie die Punktliste  $\mathbf{P}$  auf Level  $k$  unter `fe_grid{k}.P`, analog finden Sie die Listen  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{Pq}$ ,  $\mathbf{Fq}$ ,  $\mathbf{Bq}$ . Ausserdem können Sie mit  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Pq}$  wie folgt auf die Referenzlösungen zugreifen: Um  $p^{\text{ref}}$  auf dem Gitter gegeben durch die Punktliste  $\mathbf{P}$  zu erhalten, laden Sie die Datei `reference_solution.mat` und geben Sie `p_ref(1:size(P,1))` ein. Für  $v_1^{\text{ref}}$  geben Sie `v_1_ref(1:size(Pq,1))` ein (analog für  $v_2^{\text{ref}}$ ).

## Abgabe

Die Abgabe des Projektes soll per Email bis zum 31.8.2016 erfolgen. Hierzu soll eine Dokumentation in  $\text{\LaTeX}$  angefertigt werden, die neben den vorgegebenen Plots auch die Quelltexte der Lösungen enthält.