Nichtkonforme und gemischte Finite-Element-Methoden

Frühlingssemester 2016
Prof. Dr. H. Harbrecht

Universität Basel

Programmieraufgabe 3.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 3.5.2016**.

In dieser Programmieraufgabe lösen wir die Stokessche Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Zu gegebenen $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, suchen wir also $p \in L_0^2(\Omega)$ und $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$, so dass

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), && \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= 0, && \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, && \mathbf{x} \in \Gamma := \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir benutzen dafür das Taylor-Hood-Element, das p mit linearen und $\mathbf{v}$ mit quadratischen Finiten Elementen diskretisiert. Dafür definieren wir

$$\begin{aligned} U_h &:= \left\{ \mathbf{v} \in [C(\overline{\Omega})]^2 : \mathbf{v}|_\Gamma = \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{v}|_T \in [\mathcal{P}_2]^2 \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h \right\} \subset [H_0^1(\Omega)]^2, \\ V_h &:= \left\{ p \in C(\overline{\Omega}) : p|_T \in \mathcal{P}_1 \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h \right\} \subset L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Wir müssen dabei beachten, dass die Basis für den Raum U_h von der Form

$$U_h = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} N_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} N_n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ N_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ N_n \end{pmatrix} \right\},$$

ist, wobei $N_1, \ldots, N_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Basisfunktionen von $\mathcal{P}_2$ sind. Dies bedeutet, für ein $\mathbf{v}_h \in U_h$ gilt

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n v_{1,i} \begin{pmatrix} N_i(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n v_{2,i} \begin{pmatrix} 0 \\ N_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

mit Koeffizienten $v_{1,i}, v_{2,i} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.
Die Variationsformulierung von (1) lautet: Suche $(\mathbf{v}_h, p_h) \in U_h \times V_h$ so, dass

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + b(\mathbf{w}_h, p_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{w}_h)_{L^2(\Omega)}, \\ b(\mathbf{v}_h, q_h) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

für alle $(\mathbf{w}_h, q_h) \in U_h \times V_h$, wobei

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_\Omega \langle \nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{w} \rangle \, \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad b(\mathbf{v}, q) = -\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}) q \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Das zugehörige lineare Gleichungssystem hat offensichtlich die Struktur

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_1^\intercal & \mathbf{B}_2^\intercal & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Mf}_1 \\ \mathbf{Mf}_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

wobei $\mathbf{A}$ die Steifigkeitsmatrix des Laplace-Operators und $\mathbf{M}$ die entsprechende Massenmatrix ist. Ausserdem enthalten $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ die Koeffizienten $v_{1,i}$, $v_{2,i}$ aus (2) und $\mathbf{p}$ enthält entsprechend die Koeffizienten zu den Basisfunktionen aus V_h.

Um das System (3) zu diskretisieren, wählen wir auf dem Referenzelement T_{ref} als Basis für den Raum $\mathcal{P}_1$ die linearen Formfunktionen

$$M_1(x,y) = 1 - x - y, \quad M_2(x,y) = x, \quad M_3(x,y) = y$$

und als Basis für den Raum $\mathcal{P}_2$ die quadratischen Formfunktionen

$$\begin{aligned}
N_1(x,y) &= (1-x-y)(1-2x-2y),\\
N_2(x,y) &= x(2x-1),\\
N_3(x,y) &= y(2y-1),\\
N_4(x,y) &= 4x(1-x-y),\\
N_5(x,y) &= 4xy,\\
N_6(x,y) &= 4y(1-x-y),
\end{aligned}$$

wobei dem Stützpunkt $\mathbf{s}_i$ (siehe Abb. 1) die Basisfunktion M_i (wenn $\mathbf{s}_i$ ein Eckpunkt ist) bzw. N_i zugeordnet wird.

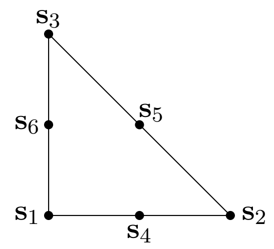

Abbildung 1: Stützpunkte für quadratische Finite Elemente.

Damit ist die lokale Elementmatrix $\mathbf{A}_T$ auf dem Element T mit Eckpunkten (x_1, y_1). (x_2, y_2) und (x_3, y_3) gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_T = \frac{1}{J_T}\Big(&\big((x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2\big)\mathbf{S}_1\\
&+ \big((x_2-x_3)(x_3-x_1) + (y_2-y_3)(y_3-y_1)\big)\mathbf{S}_2\\
&+ \big((x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2\big)\mathbf{S}_3\Big),
\end{aligned}$$

wobei

$$J_T = (x_2-x_1)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y_2-y_1)$$

und

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 8 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -8 & 8 & 0\\ -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 4 & 0 & -4\\ -1 & 0 & 1 & 4 & -4 & 0\\ 1 & 1 & 6 & 0 & -4 & -4\\ 4 & 4 & 0 & 8 & -8 & -8\\ 0 & -4 & -4 & -8 & 8 & 8\\ -4 & 0 & -4 & -8 & 8 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_3 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -8\\ 0 & -4 & -4 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Die Matrizen $\mathbf{B}_1$ und $\mathbf{B}_2$ ergeben sich aus den lokalen Matrizen $\mathbf{B}_{T,1}$ und $\mathbf{B}_{T,2}$, die definiert sind als

$$\mathbf{B}_{T,1} = (y_3 - y_2)\mathbf{C}_1 + (y_1 - y_3)\mathbf{C}_2$$
$$\mathbf{B}_{T,2} = (x_2 - x_3)\mathbf{C}_1 + (x_3 - x_1)\mathbf{C}_2$$

und

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die Massenmatrix $\mathbf{M}$ erhält man aus den lokalen Elementmatrizen $\mathbf{M}_T$ mit

$$\mathbf{M}_T = \frac{J_T}{360}\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 32 & 16 & 16 \\ -4 & 0 & 0 & 16 & 32 & 16 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 16 & 32 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 1. Schreiben Sie eine Funktion

```
function [Pq,Fq,Bq] = quadgrid(P,F,B),
```

die ein Dreiecksgitter für lineare Finite Elemente in ein Gitter für quadratische Finite Elemente umwandelt. Schreiben Sie dabei die auf einem Dreieck neu hinzugekommenen Punkte in dieselbe Zeile der Elementliste `F`, in der auch die Eckpunkte des Dreiecks stehen, sodass `Fq` sechs Spalten hat. Zum Beispiel würde für das Dreieck aus Abb. 1 die entsprechende Zeile der Elementliste wie folgt aussehen:

```
Fq(i,:) = [1 2 3 4 5 6].
```

Hinweis. Eine kleine Änderung an Ihrer `refine`-Funktion sollte genügen.

Aufgabe 2. Schreiben Sie zwei Funktionen

```
function A = stiffness_quad(Pq,Fq,Bq)
```

und

```
function M = mass_quad(Pq,Fq,Bq),
```

die die Steifigkeits- und Massenmatrix für quadratische Finite Elemente aufstellen. Testen Sie dann Ihre Funktionen, indem Sie das Poisson-Problem

$$-\Delta u = f$$

auf dem Einheitsquadrat mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen und der rechten Seite $f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ lösen. Die zugehörige exakte Lösung ist $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$. Zeigen Sie auch, dass der L^2-Fehler ihrer Lösung mit der richtigen Ordnung konvergiert. Benutzen Sie die Mittelpunktregel, um den Fehler zu approximieren.

Aufgabe 3. Schreiben Sie eine Funktion

```
function [B_1,B_2] = B_global(Pq,Fq,Bq),
```

die die Matrizen $\mathbf{B}_1$ und $\mathbf{B}_2$ aus (4) aufstellt und lösen Sie das Problem (1) mit der rechten Seite

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1(x,y) \\ \mathbf{f}_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi \sin(2\pi y)\big(\cos(2\pi x) - 2\pi^2 \cos(2\pi x) + \pi^2\big) \\ 2\pi \sin(2\pi x)\big(\cos(2\pi y) + 2\pi^2 \cos(2\pi y) - \pi^2\big) \end{pmatrix}$$

und den exakten Lösungen

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) \\ \mathbf{v}(x,y) &= 2\pi \sin(\pi x)\sin(\pi y) \begin{pmatrix} \sin(\pi x)\cos(\pi y) \\ -\cos(\pi x)\sin(\pi y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung für den Druck p quadratisch konvergiert. Zeichnen Sie ausserdem einen `quiver`-Plot des Flusses $\mathbf{v}$.