Nichtkonforme und gemischte Finite-Element-Methoden

Frühlingssemester 2016
Prof. Dr. H. Harbrecht

Universität Basel

Übungsblatt 8.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 26.4.2016, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (polynomiale Finite Elemente)

Wir wollen die Bilinearform $a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$ mittels stückweise stetigen, elementweise polynomialen Finiten Elementen vom Grad d diskretisieren. Dazu betrachten wir die Ansatzfunktionen $\{N_i\}_{i=1,\ldots,d(d+1)/2}$ auf einem allgemeinen Dreieck T mit Eckpunkten $(x_i, y_i)_{i=1,2,3}$, und die Ansatzfunktionen $\{\hat{N}_i\}_{i=1,\ldots,d(d+1)/2}$ auf dem Referenzdreieck $\hat{T}$. Zeigen Sie, dass die folgende Transformation auf das Referenzdreieck

$$\int_T \big\langle \nabla N_i(\mathbf{x}), \nabla N_j(\mathbf{x}) \big\rangle \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{2|T|}(A + B + C)$$

gilt mit

$$A = \big((x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2\big) \underbrace{\int_{\hat{T}} \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \lambda_1} \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2}_{=a_{i,j}}$$

$$B = \big((x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_3 - y_1)\big) \underbrace{\int_{\hat{T}} \left(\frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \lambda_1} \right) \mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2}_{=b_{i,j}}$$

$$C = \big((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2\big) \underbrace{\int_{\hat{T}} \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \lambda_2} \,\mathrm{d}\lambda_1 \,\mathrm{d}\lambda_2}_{=c_{i,j}}$$

Dies bedeutet insbesondere, dass die lokale Finite-Elemente-Matrix von T eine Linearkombination von a-priori berechenbaren Matrizen auf dem Referenzdreieck ist. Es müssen jeweils nur die Koeffizienten neu berechnet werden.

Hinweis. Benutzen Sie die gleiche Koordinatentransformation wie bei der Berechnung der lokalen Elementmatrizen der Raviart-Thomas-Elemente.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Taylor-Hood-Elemente auf dem Referenzdreieck)

Auf einem Dreieck T seien $\{N_i\}_{i=1,\dots,d(d+1)/2}$ und $\{M_i\}_{i=1,\dots,d'(d'+1)/2}$ polynomiale Finite Elemente vom nicht notwendigerweise gleichen Grad d bzw. d'. Zeigen Sie, dass

$$\int_T \operatorname{div} \begin{bmatrix} N_i(\mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix} M_j(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \bigl(y_3 - y_2\bigr) \underbrace{\int_{\hat{T}} \frac{\partial N_i}{\partial \lambda_1} M_j \,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2}_{=d_{i,j}} + \bigl(y_1 - y_3\bigr) \underbrace{\int_{\hat{T}} \frac{\partial N_i}{\partial \lambda_2} M_j \,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2}_{=e_{i,j}}$$

und

$$\int_T \operatorname{div} \begin{bmatrix} 0 \\ N_i(\mathbf{x}) \end{bmatrix} M_j(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \bigl(x_3 - x_2\bigr) \int_{\hat{T}} \frac{\partial N_i}{\partial \lambda_1} M_j \,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 + \bigl(x_1 - x_3\bigr) \int_{\hat{T}} \frac{\partial N_i}{\partial \lambda_2} M_j \,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (lokale Formfunktionen)

Geben Sie die lokalen, quadratischen Formfunktionen $\hat{N}_i$ und die linearen Formfunktionen $\hat{M}_i$ aus den Aufgaben 1 und 2 auf dem Referenzdreieck an. Berechnen Sie jeweils eine Spalte der Matrizen mit den Einträgen $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$, $d_{i,j}$ und $e_{i,j}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. ($\mathcal{Q}_1$-$\mathcal{P}_0$-Element)

Wir betrachten das $\mathcal{Q}_1$-$\mathcal{P}_0$-Element, wobei U_h den Raum für die elementweise bilineare Diskretisierung des Flusses und V_h den Raum für die elementweise konstante Diskretisierung des Drucks bezeichne. Der Raum $R_h \subset V_h$ sei definiert durch

$$R_h = \{q \in V_h \colon (q, \rho)_{L^2(\Omega)} = 0\},$$

wobei ρ den zur Schachbrett-Instabilität gehörenden Druck bezeichne. Für die unsymmetrische Bilinearform der Stokes-Gleichung lässt sich dann zeigen, dass

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in U_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta h \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \text{ für alle } q \in R_h.$$

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass sich der Faktor h in dieser Abschätzung nicht vermeiden lässt.