Übungsblatt 7.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 19.4.2016, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (LBB-Bedingung)

Seien V, Q Hilbert-Räume, wobei Q endlichdimensional sei. Ferner sei $b : V \times Q \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit

$$\beta := \inf_{q\in Q} \sup_{v\in V} \frac{|b(v,q)|}{\|v\|_V \|q\|_Q}.$$

Zeigen Sie: Aus $\beta = 0$ folgt, dass ein $q \in Q$ existiert mit $b(v,q) = 0$ für alle $v \in V$.

Hinweis. Nutzen Sie aus, dass die Menge $\{q \in Q : \|q\|_Q \leq 1\}$ kompakt ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Uzawa-Algorithmus mit konjugierten Richtungen)

Das folgende lineare Gleichungssystem soll numerisch gelöst werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\intercal & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}.$$

Dabei sei $\mathbf{A}$ eine positiv definite Matrix und $\mathbf{B}$ habe vollen Rang.

a) Zeigen Sie, dass die Lösung $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ sich als Lösung folgender Gleichungssysteme charakterisieren lässt:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\intercal \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{B}^\intercal \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f} - \mathbf{g}, \\ \mathbf{A}\mathbf{u} &= \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}. \end{aligned}$$

b) Der Uzawa-Algorithmus mit konjugierten Richtungen lautet:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &:= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}_0), \\ \mathbf{d}_0 &:= \mathbf{r}_0 := \mathbf{B}^\intercal \mathbf{u}_0 - \mathbf{g}, \\ \mathbf{p}_k &:= \mathbf{B}\mathbf{d}_k, \\ \mathbf{h}_k &:= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}_k, \\ \boldsymbol{\lambda}_{k+1} &:= \boldsymbol{\lambda}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k \quad \text{mit } \alpha_k := \frac{\|\mathbf{r}_k\|^2}{\mathbf{p}_k^\intercal \mathbf{h}_k}, \\ \mathbf{u}_{k+1} &:= \mathbf{u}_k - \alpha_k \mathbf{h}_k, \\ \mathbf{r}_{k+1} &:= \mathbf{B}^\intercal \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{g}, \\ \mathbf{d}_{k+1} &:= \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{d}_k \quad \text{mit } \beta_k := \frac{\|\mathbf{r}_{k+1}\|^2}{\|\mathbf{r}_k\|^2}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus mathematisch äquivalent ist zum CG-Verfahren für das erste Gleichungssystem aus Aufgabenteil a).

Aufgabe 3. (Bramble-Pasciack-CG für das Stokes-Problem)

Wir betrachten die Stokes-Gleichung

$$-\Delta \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

mit homogenen Randbedingungen für $\mathbf{v}$. Nach der Diskretisierung auf einem Netz der Maschenweite h sei das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\intercal & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

gegeben. Der Vorkonditionierer $\mathbf{A}_0$ erfülle für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ die Beziehung

$$\mathbf{0} < \mathbf{x}^\intercal \mathbf{A}_0 \mathbf{x} < \mathbf{x}^\intercal \mathbf{A} \mathbf{x}$$

und sei uniform spektraläquivalent zu $\mathbf{A}$. Zeigen Sie, dass die Konditionszahl der Systemmatrix $\hat{\mathbf{S}}$ des Bramble-Pasciak-CG-Verfahrens unabhängig von h durch eine Konstante beschränkt ist. Was bedeutet dies für die Anzahl der benötigten Iterationen?

Hinweis: Zeigen Sie, dass für Konstanten $0 < \underline{\beta} < \overline{\beta}$ und $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt:

$$\underline{\beta} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^\intercal \mathbf{B}^\intercal \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{x} \leq \overline{\beta} \|\mathbf{x}\|^2.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Ableitungen von Gebieten)

Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei das Gebiet $\Omega_t \subset \mathbb{R}^d$ gegeben durch

$$\Omega_t = \big\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{y} = \mathbf{x} + t\mathbf{v}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega \big\}.$$

Hierbei sei das Verschiebungsfeld $\mathbf{v} \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass für eine stetig differenzierbare Funktion $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_t} f \,\mathrm{d}\mathbf{x} \bigg|_{t=0} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(f\,\mathbf{v}) \,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Hinweis: Tranformieren sie das Integral über Ω_t auf Ω und arbeiten Sie mit Differenzenquotienten. Sie dürfen dabei verwenden, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \det \big(\mathbf{I} + t \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) \big) \bigg|_{t=0} = \operatorname{div} \big(\mathbf{v}(\mathbf{x}) \big).$$

(4 Punkte)