Nichtkonforme und gemischte Finite-Element-Methoden

Frühlingssemester 2016
Prof. Dr. H. Harbrecht

Universität Basel

Übungsblatt 6.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 12.4.2016, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (Fehlerabschätzung)

Es sei $\{\mathcal{T}_h\}$ eine Familie quasi-uniformer Triangulierung, so dass die Bedingungen aus Satz 13.6 für konforme Finite-Element-Räume $U_h \subset U$ und $V_h \subset V$ erfüllt sind mit von h unabhängigen Konstanten c_E, c_S und γ. Zeigen Sie, dass dann eine eindeutige Lösung $(u_h, p_h) \in U_h \times V_h$ mit Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_U + \|p - p_h\|_V \leq c\left\{\inf_{w_h \in U_h} \|u - w_h\|_U + \inf_{q_h \in V_h} \|p - q_h\|_V\right\}$$

existiert.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2 auf Blatt 4.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Lokale Elementmatrizen von Raviart-Thomas-Elementen)

Auf dem Dreieck T mit Schwerpunkt (x_T, y_T) betrachten wir die Formfunktionen

$$\boldsymbol{\varphi}_1(x,y) = (1,0), \qquad \boldsymbol{\varphi}_2(x,y) = (0,1), \qquad \boldsymbol{\varphi}_3(x,y) = (x - x_T, y - y_T).$$

Zeigen Sie, dass die lokalen Elementmatrizen $\mathbf{M}_T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $\mathbf{C}_T \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ definiert durch

$$(\mathbf{M}_T)_{jk} = \int_T \langle \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_k \rangle \,\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad (\mathbf{C}_T)_j = \int_T \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_j \,\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad j,k = 1,2,3,$$

gegeben sind durch

$$\mathbf{M}_T = |T| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s/36 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_T = 2|T| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hierbei sei der Wert s für die Eckpunkte $\mathbf{z}_i = (x_i, y_i)$ des Dreiecks T definiert als

$$s = \|\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1\|_2^2 + \|\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2\|_2^2 + \|\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1\|_2^2.$$

Hinweis: Sie können sich gegebenenfalls mit Hilfe der Baryzentrischen Koordinaten leicht eine Transformation auf das Referenzdreieck erstellen. Drücken Sie dafür λ_1 und λ_2 abhängig von x und y aus, und setzen Sie $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$. Für die Integration auf dem Referenzdreieck reicht es dann über $\{(\lambda_1,\lambda_2)\colon \lambda_1 \in [0,1], \lambda_2 \in [0, 1-\lambda_1]\}$ zu integrieren.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Projektion auf Raviart-Thomas-Elemente)

Sei T ein Dreieck und sei $\mathbf{v} \in [H^1(T)]^2$ gegeben. Die Projektion $\mathbf{v}_h$ auf die Raviart-Thomas-Elemente sei elementweise gegeben durch die drei Mittelwerte auf den Kanten in Normalenrichtung. Benutzen Sie den Spursatz, um zu zeigen, dass

$$\|\mathbf{v}_h\|_{L^2(T)} \leq c\|\mathbf{v}\|_{H^1(T)}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Zur Programmieraufgabe)

Gegeben sei die Variationsformulierung

Finde $\big(\mathbf{v}_h, (p_h, \lambda_h)\big) \in R_h \times (V_h \times \Lambda_h)$, so dass

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) - b\big(\mathbf{w}_h, (p_h, \lambda_h)\big) &= 0, \\ b\big(\mathbf{v}_h, (q_h, \mu_h)\big) &= \langle q_h, f\rangle, \end{aligned}$$

für alle $\big(\mathbf{w}_h, (q_h, \mu_h)\big) \in R_h \times (V_h \times \Lambda_h)$.

Hierbei sei

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) &= \int_\Omega \langle \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h\rangle \,\mathrm{d}\mathbf{x}, \\ b\big(\mathbf{w}_h, (p_h, \lambda_h)\big) &= -\int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{w}_h \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \sum_{E\in\mathcal{E}} \int_E [\langle \mathbf{w}_h, \mathbf{n}_E\rangle]\, \lambda_h \,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

wobei $[\mathbf{w}_h, \mathbf{n}_E]$ den Sprung einer Funktion in der Richtung der Normalen $\mathbf{n}_E$ an die Kante E beschreibt. Ferner sei $\mathcal{E}$ die Menge aller inneren Kanten und

$$\begin{aligned} V_h &= \left\{p_h \in L^2(\Omega) : p|_T \in \mathcal{P}_0 \ \forall T \in \mathcal{T}_h\right\}, \\ R_h &= \left\{\mathbf{v}_h \in \left[L^2(\Omega)\right]^2 : \mathbf{v}(x,y)|_T = (a_T, b_T) + c_T(x,y),\ a_T, b_T, c_T \in \mathbb{R},\ \forall T \in \mathcal{T}_h\right\}, \\ \Lambda_h &= \left\{\lambda_h \in L^2(\mathcal{E}) : \forall E \in \mathcal{E},\ \lambda|_E \in \mathcal{P}_0(\mathcal{E}),\ \lambda|_{\partial\Omega} \equiv 0\right\}. \end{aligned}$$

a) Beweisen Sie die Existenz einer eindeutigen Lösung.

b) Zeigen Sie, dass die Variationsformulierung

Finde $(p_h, \mathbf{v}_h, \lambda_h) \in V_h \times R_h \times \Lambda_h$, so dass

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h\rangle \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{w}_h \,\mathrm{d}\mathbf{x} - \sum_{E\in\mathcal{E}} \int_E [\langle \mathbf{w}_h, \mathbf{n}_E\rangle]\, \lambda_h \,\mathrm{d}s &= 0, \\ \int_\Omega q_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \,\mathrm{d}\mathbf{x} &= -\int_\Omega q_h f \,\mathrm{d}\mathbf{x}, \\ -\sum_{E\in\mathcal{E}} \int_E [\langle \mathbf{v}_h, \mathbf{n}_E\rangle]\, \mu_h \,\mathrm{d}s &= 0, \end{aligned}$$

für alle $(q_h, \mathbf{w}_h, \mu_h) \in V_h \times R_h \times \Lambda_h$.

äquivalent zu der vorherigen ist.

(4 Punkte)