Nichtkonforme und gemischte Finite-Element-Methoden

Frühlingssemester 2016
Prof. Dr. H. Harbrecht

Universität Basel

Übungsblatt 4.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 29.3.2016, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (elliptische Bilinearformen)

Sei $A\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige, positive, symmetrische Bilinearform, welche die inf-sup-Bedingung erfüllt. Man zeige, dass A elliptisch ist. Mit anderen Worten, es ist

$$A(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \qquad \text{für alle } v \in V$$

erfüllt mit einem $\alpha > 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (inf-sup-Bedingung I)

Sei U, V ein Hilbert-Räume und $L\colon U \to V'$ ein stetiger, linearer Operator. Die Bilinearform $A\colon U \times V \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $A(u,v) = \langle Lu, v\rangle$. Zeigen Sie: L ist genau dann ein Isomorphismus, wenn A die inf-sup-Bedingung erfüllt und zu jedem $v \in V \setminus \{0\}$ ein $u \in U$ mit $A(u,v) \neq 0$ existiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (inf-sup-Bedingung II)

Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$\text{zu jedem } v \in V \setminus \{0\} \text{ existiert ein } u \in U \text{ mit } A(u,v) \neq 0$$

in Aufgabe 2 und in der Vorlesung durch die folgende inf-sup-Bedingung ersetzt werden kann:

$$\inf_{v \in V\setminus\{0\}} \sup_{u \in U\setminus\{0\}} \frac{A(u,v)}{\|u\|_U \|v\|_V} \geq c_E' > 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $L^\star$ injektiv ist, und schliessen Sie auf die Behauptung.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (inf-sup-Bedingung III)

Zeigen Sie, dass die inf-sup-Bedingung

$$\inf_{u \in U \setminus \{0\}} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{A(u,v)}{\|u\|_U \|v\|_V} \geq c_E > 0$$

zusammen mit

$$\text{zu jedem } v \in V \setminus \{0\} \text{ existiert ein } u \in U \text{ mit } A(u,v) \neq 0$$

äquivalent ist zur inf-sup-Bedingung

$$\begin{aligned} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{A(u,v)}{\|v\|_V} &\geq c_E \|u\|_U \qquad \text{für alle } u \in U, \\ \sup_{u \in U \setminus \{0\}} A(u,v) &> 0 \qquad \text{für alle } v \in V \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

(4 Punkte)