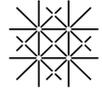


# Nichtkonforme und gemischte Finite-Element-Methoden

Frühlingssemester 2016  
Prof. Dr. H. Harbrecht



Universität  
Basel

## Übungsblatt 4.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 29.3.2016, 10:15 Uhr.**

### Aufgabe 1. (elliptische Bilinearformen)

Sei  $A: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige, positive, symmetrische Bilinearform, welche die inf-sup-Bedingung erfüllt. Man zeige, dass  $A$  elliptisch ist. Mit anderen Worten, es ist

$$A(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \text{für alle } v \in V$$

erfüllt mit einem  $\alpha > 0$ .

(4 Punkte)

### Aufgabe 2. (inf-sup-Bedingung I)

Sei  $U, V$  ein Hilbert-Räume und  $L: U \rightarrow V'$  ein stetiger, linearer Operator. Die Bilinearform  $A: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch  $A(u, v) = \langle Lu, v \rangle$ . Zeigen Sie:  $L$  ist genau dann ein Isomorphismus, wenn  $A$  die inf-sup-Bedingung erfüllt und zu jedem  $v \in V \setminus \{0\}$  ein  $u \in U$  mit  $A(u, v) \neq 0$  existiert.

(4 Punkte)

### Aufgabe 3. (inf-sup-Bedingung II)

Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$\text{zu jedem } v \in V \setminus \{0\} \text{ existiert ein } u \in U \text{ mit } A(u, v) \neq 0$$

in Aufgabe 2 und in der Vorlesung durch die folgende inf-sup-Bedingung ersetzt werden kann:

$$\inf_{v \in V \setminus \{0\}} \sup_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{A(u, v)}{\|u\|_U \|v\|_V} \geq c'_E > 0.$$

**Hinweis:** Zeigen Sie, dass  $L^*$  injektiv ist, und schliessen Sie auf die Behauptung.

(4 Punkte)

**Aufgabe 4.** (inf-sup-Bedingung III)

Zeigen Sie, dass die inf-sup-Bedingung

$$\inf_{u \in U \setminus \{0\}} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{A(u, v)}{\|u\|_U \|v\|_V} \geq c_E > 0$$

zusammen mit

zu jedem  $v \in V \setminus \{0\}$  existiert ein  $u \in U$  mit  $A(u, v) \neq 0$

äquivalent ist zur inf-sup-Bedingung

$$\begin{aligned} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{A(u, v)}{\|v\|_V} &\geq c_E \|u\|_U \quad \text{für alle } u \in U, \\ \sup_{u \in U \setminus \{0\}} A(u, v) &> 0 \quad \text{für alle } v \in V \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

(4 Punkte)