Nichtkonforme und gemischte Finite-Element-Methoden

Frühlingssemester 2016
Prof. Dr. H. Harbrecht

Universität Basel

Übungsblatt 3.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 15.3.2016, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (Stokes-Gleichung I)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Betrachten Sie das System zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

Hierbei seien $\mathbf{u}, \mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und $p : \Omega \to \mathbb{R}$. Dieses System bezeichnet man als die Gleichungen von Stokes. Für $d = 3$ ergibt sich eine physikalische Bedeutung: In der Strömungsmechanik beschreibt die Stokes-Gleichung die Strömung eines inkompressiblen Mediums bei Vernachlässigung der Trägheitsterme. Die Funktion $\mathbf{u}$ ist dabei das Geschwindigkeitsfeld, die Funktion p ist der Druck. Die Randbedingungen schreiben vor, dass die Strömung am Rand ruht.

a) Was lässt sich über die Anzahl der Lösungen der Stokes-Gleichung aussagen, wenn die Existenz einer Lösung $(\mathbf{u}, p)$ bereits gesichert ist?

b) Leiten Sie die schwache Formulierung der Stokes-Gleichung her. Gehen sie hierzu davon aus, dass eine schwache Lösung $(\mathbf{u}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times L_0^2(\Omega)$ gesucht ist. Hierbei bezeichne $L_0^2(\Omega)$ den Unterraum aller quadratintegrierbaren Funktionen über Ω, deren Mittelwert verschwindet.
Hinweis: Bei der Formulierung ergeben sich zwei Bilinearformen:

$$\begin{aligned} a(\cdot,\cdot) &: [H_0^1(\Omega)]^d \times [H_0^1(\Omega)]^d \to \mathbb{R} \quad \text{und} \\ b(\cdot,\cdot) &: L_0^2(\Omega) \times [H_0^1(\Omega)]^d \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

c) Welche Voraussetzungen ergeben sich hierbei an die rechte Seite $\mathbf{f}$?

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Stokes-Gleichung II)

a) Stellen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 1 bestimmten Variationsformulierung nun das Sattelpunktproblem für die Stokes-Gleichung auf.

b) Zeigen Sie die Stetigkeit der hieraus resultierenden Bilinearform.

c) Ist die Bilinearform auch elliptisch?

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (stetige Operatoren)

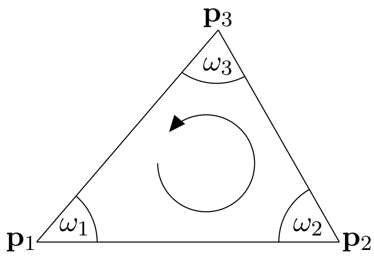
Seien E, F Banach-Räume und $T \in \mathcal{L}(E, F)$ injektiv mit stetiger Umkehrabbildung

$$T^{-1} : T(E) \to E.$$

Zeigen Sie, dass $T(E)$ in F abgeschlossen ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Lokale Elementmatrizen für Crouzeix-Raviart-Elemente)



Zur Diskretisierung des Poisson-Problems mittels linearer finiter Elemente wird die Systemmatrix aus den *lokalen Elementmatrizen* zusammensetzt. Die lokale Elementmatrix $\mathbf{A}_T$ für das Dreieck T, gegeben durch die Eckpunkte $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$ und $\mathbf{p}_3 = (x_3, y_3)$, ist gegeben durch:

$$\mathbf{A}_T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cot(\omega_3) + \cot(\omega_2) & -\cot(\omega_3) & -\cot(\omega_2) \\ -\cot(\omega_3) & \cot(\omega_3) + \cot(\omega_1) & -\cot(\omega_1) \\ -\cot(\omega_2) & -\cot(\omega_1) & \cot(\omega_2) + \cot(\omega_1) \end{bmatrix},$$

wobei $\cot(\omega)$ die Kotangensfunktion ist und $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die zu den Eckpunkten gehörenden Innenwinkel bezeichnen.

Zeigen Sie, dass die lokale Elementmatrix $\mathbf{A}_T^{CR}$ zur Diskretisierung des Poisson-Problems mittels Crouzeix-Raviart-Elementen gegeben ist durch $\mathbf{A}_T^{CR} = 4\mathbf{A}_T$.

(4 Punkte)