Nichtkonforme und gemischte Finite-Element-Methoden

Frühlingssemester 2016
Prof. Dr. H. Harbrecht

Universität Basel

Übungsblatt 10.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 17.5.2016, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (Analytische Lösung der Wellengleichung)

Wir betrachten die homogene Wellengleichung auf dem Einheitsquadrat

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \text{ in } (0,T) \times (0,1)^2$$

mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u = 0 \text{ auf } (0,T) \times \Gamma := \partial\big((0,1)^2\big)$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(0,\mathbf{x}) = \sin(\pi \mathbf{x}_1)\sin(4\pi \mathbf{x}_2), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,\mathbf{x}) = \sqrt{3}\pi \sin(\pi \mathbf{x}_1)\sin(4\pi \mathbf{x}_2) \quad \text{in } (0,1)^2.$$

Berechnen Sie die analytische Lösung der Wellengleichung.

Hinweis. Benutzen Sie den Separationsansatz aus der Vorlesung, und lösen Sie das zugehörige Eigenwertproblem mit einem zusätzlichen Separationsansatz.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Spektralsatz I)

Gegeben sei ein stetiger und symmetrischer Operator $\mathcal{K}\colon L^2(D) \to L^2(D)$. Zeigen Sie, dass

$$\|\mathcal{K}\| = \sup_{\|u\|_{L^2(D)}=1} (u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Spektralsatz II)

Gegeben sei ein symmetrischer, positiv semidefiniter und kompakter Operator $0 \neq \mathcal{K}\colon L^2(D) \to L^2(D)$. Zeigen Sie, dass

$$\lambda := \sup_{\|u\|_{L^2(D)}=1} (u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)}$$

ein Maximum ist und dass die maximierende Funktion v zusammen mit λ ein Eigenpaar von $\mathcal{K}$ ist.

Hinweis. Ein Operator $\mathcal{K}\colon L^2(D) \to L^2(D)$ ist kompakt, wenn er stetig ist und das Bild jeder beschränkten Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Spektralsatz III)

Konstruieren Sie durch geeignetes Einschränken des Operators aus der vorherigen Aufgabe eine Folge von orthonormalen Eigenpaaren (λ_k, v_k) mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{K}u = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (u, v_k)_{L^2(D)} v_k = \sum_{k=0}^{n} (\mathcal{K}u, v_k)_{L^2(D)} v_k,$$

falls die Folge der λ_k abbricht, das heisst, es ist $\lambda_k = 0$ für alle $k > n$. Zeigen Sie, dass $\lambda_k \to 0$ gilt, falls die Folge der λ_k nicht abbricht, und dass in diesem Fall

$$\mathcal{K}u = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (u, v_k)_{L^2(D)} v_k = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{K}u, v_k)_{L^2(D)} v_k$$

gilt.

(4 Punkte)