Nichtkonforme und gemischte Finite-Element-Methoden

Frühlingssemester 2016
Prof. Dr. H. Harbrecht

Universität Basel

Übungsblatt 1.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 1.3.2016, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (Bilinearformen I)

Betrachten Sie das Poisson-Problem auf einem durch einen Polygonzug berandeten Gebiet. Diskretisiert werde mit $\mathcal{P}_r$-Elementen für $r \geq 1$. Sei $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ die zugehörige Bilinearform und $a_h(\cdot,\cdot) : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ eine mit numerischem Quadraturfehler behaftete Bilinearform. Für ein $s > 0$ gelte

$$|a(v,v) - a_h(v,v)| \leq ch^s |v|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \text{für alle } v \in V_h.$$

a) Wie wirkt sich dieser Fehler auf $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ aus?

b) Welche Ordnung sollte die Quadraturformel in Abhängigkeit von r haben, damit bei der Konvergenz keine Einbusse stattfindet?

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Bilinearformen II)

Sei H ein Hilbertraum und seien $V_h, V \subset H$ Unterräume, wobei $\dim V_h < \infty$ und $V_h \not\subset V$ gelte. Sei ferner $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige, symmetrische, und auf ganz H elliptische Bilinearform. Ferner sei $u \in V$ die Lösung des Variationsproblems

$$a(u,v) = \ell(v) \qquad \text{für alle } v \in V$$

und $u_h \in V_h$ die Lösung des Variationsproblems

$$a(u_h,v) = \ell(v) \qquad \text{für alle } v \in V_h,$$

wobei $\ell \in H'$ sei. Zeigen Sie, dass dann bezüglich der Energienorm $\|\cdot\|_a := \sqrt{a(\cdot,\cdot)}$ die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_a \leq \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_a + \sup_{w_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{|a(u - u_h, w_h)|}{\|w_h\|_a}$$

gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Konvergenz in der Praxis)

Wir betrachten das Diffusions-Problem $-\operatorname{div}(a\nabla u) = f$ mit homogenen Randbedingungen und einem stetig differenzierbaren Diffusionskoeffizienten a auf einem konvexen, polygonalen Gebiet. Zur Diskretisierung seien auf einer quasi-uniformen Triangulierung $\mathcal{T}_h$ lineare Finite Elemente gegeben, insbesondere seien die lokalen Elementmatrizen der Steifigkeitsmatrix für jedes $T \in \mathcal{T}_h$ gegeben durch

$$\mathbf{A}_T = \frac{a_T}{2}\begin{bmatrix} \cot(\omega_3)+\cot(\omega_2) & -\cot(\omega_3) & -\cot(\omega_2) \\ -\cot(\omega_3) & \cot(\omega_3)+\cot(\omega_1) & -\cot(\omega_1) \\ -\cot(\omega_2) & -\cot(\omega_1) & \cot(\omega_2)+\cot(\omega_1) \end{bmatrix}.$$

Hierbei sei a_T der Mittelwert des Diffusionskoeffizienten auf dem Dreieck $T \in \mathcal{T}_h$. Zur Diskretisierung der rechten Seite werde die Funktion f linear in den Gitterpunkten interpoliert. Der zugehörige Knotenvektor werde mit $\mathbf{f}$ bezeichnet. Mit der Massenmatrix $\mathbf{M}$ gilt dann

$$\int\limits_{\operatorname{supp}(\varphi_i)} f(\mathbf{x})\varphi_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \approx [\mathbf{M}\mathbf{f}]_i.$$

Offensichtlich wird beim Bestimmen der rechten Seite ein Quadraturfehler eingeführt. Treten bei der Berechnung der Steifigkeitsmatrix Quadraturfehler auf? Zeigen Sie, dass die Konvergenzordnung des H^1- und L^2-Fehlers des Finite-Elemente-Verfahrens durch den Quadraturfehler nicht beinträchtigt wird.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Crouzeix-Raviart-Element)

a) Wie sehen die drei Formfunktionen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 des Crouzeix-Raviart-Elements auf dem Referenzdreieck aus?

b) Bestimmen Sie auf dem Referenzdreieck die Matrix $\mathbf{A} = [a(\phi_i, \phi_j)]_{i,j=1}^3$ mit

$$a(\phi_i, \phi_j) = \int\limits_{T_{\text{ref}}} \langle \nabla\phi_i, \nabla\phi_j\rangle \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3.$$

c) Bestimmen Sie für das Einheitsquadrat mit uniformer Triangulierung und der Kathetenlänge h die entsprechende Steifigkeitsmatrix.

(4 Punkte)