Übungsblatt 9.

Bearbeiten bis: **Montag, 25.11.2024, 12:00**

Aufgabe 1 (Steifigkeit der Wärmeleitungsgleichung | 4 Punkte). Sei Ω ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand und $\{\mathcal{T}_h\}_h$ eine quasi-uniforme Familie von Triangulierungen des Gebiets Ω. Für nodale, stückweise lineare Ansatzfunktionen ϕ_h^i, $1 \leq i \leq N_h$, bezeichne $\mathbf{u}_h(t)$ den Koeffizientenvektor einer Funktion $u_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_h} u_h^i(t)\phi_h^i(\mathbf{x})$. Weiter seien

$$\mathbf{M}_h := \left[\left\langle \phi_h^j, \phi_h^i \right\rangle_{L^2(\Omega)}\right], \qquad \mathbf{A}_h := \left[\left\langle \nabla\phi_h^j, \nabla\phi_h^i \right\rangle_{L^2(\Omega)}\right],$$

die Masse- und Steifigkeitsmatrizen bzgl. der nodalen Basis.

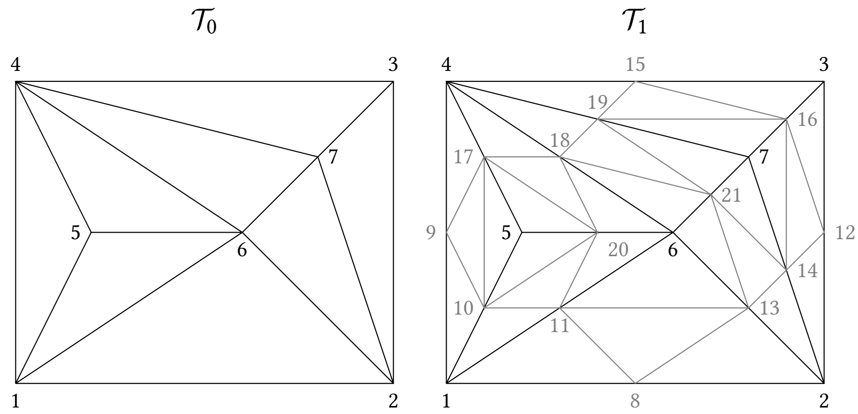
(a) Zeigen Sie, dass die Galerkin-Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u_h(\mathbf{x}, t) = \kappa\Delta u_h(\mathbf{x}, t) + f_h(\mathbf{x}, t)$ auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_h(t) = -\mathbf{M}_h^{-1}\mathbf{A}_h\mathbf{u}_h(t) + \mathbf{f}_h(t)$$

führt.

(b) Zeigen Sie, dass diese Gleichung für $h \to 0$ steif wird.

Aufgabe 2 (Prolongation und Restriktion | 4 Punkte). Geben Sie die Prolongations- und Restriktionsmatrizen $\mathbf{I}_0^1$ und $\mathbf{I}_1^0$ zwischen den Finite-Elemente-Räumen der stetigen, stückweise linearen Ansatzfunktionen auf den folgenden geschachtelten Dreiecksnetzen an.



Aufgabe 3 (Gedämpftes Jacobi-Verfahren | 4 Punkte). Sei $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$ die Systemmatrix aus der Diskretisierung der zweidimensionalen Laplace-Gleichung auf dem Einheitsquadrat zu homogenen Randbedingungen. Dann ist die Iterationsmatrix des gedämpften Jacobi-Verfahrens gegeben durch

$$\mathbf{S} = (1-\omega)\mathbf{I} + \omega\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und -vektoren des gedämpften Jacobi-Verfahrens.

(b) Betrachten Sie nun das gedämpfte Jacobi-Verfahren für $n = 32$ mit $\omega = \frac{2}{3}$. Welche Frequenzen sind nach 10 Iterationsschritten um weniger als den Faktor 2 geglättet?

Aufgabe 4 (Glättungseigenschaft | 4 Punkte). Im Folgenden soll die Glättungseigenschaft des gedämpften Jacobi- sowie des gedämpften Gauß-Seidel-Verfahrens gezeigt werden. Die Iterationsmatrix des letztgenannten Verfahrens ist gegeben durch

$$\mathbf{S} = (1-\omega)\mathbf{I} + \omega(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Zerlegung der Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$, bezüglich der sich die Iterationsmatrix des gedämpften Jacobi-Verfahrens mit $\omega = \frac{1}{2}$ schreiben lässt als

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}.$$

Wie lauten die entsprechenden Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ für das gedämpfte Gauß-Seidel-Verfahren, ebenfalls mit $\omega = \frac{1}{2}$?

(b) Nehmen Sie weiter an, dass $\mathbf{A}$ schwach diagonaldominant ist, das bedeutet

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{i,j}| \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass dann $\mathbf{M}$ regulär ist und $\|\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\|_\infty \leq 1$ gilt.