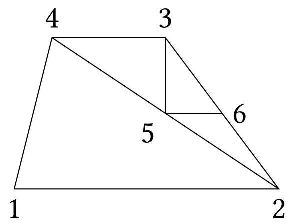
Übungsblatt 8.

Bearbeiten bis: **Montag, 18.11.2024, 12:00**

Aufgabe 1 (Hängende Knoten | 4 Punkte). Gegeben sei folgendes Finite-Elemente-Netz mit einem hängenden Knoten:



Auf dem Netz betrachten wir eine Diskretisierung der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ und der rechten Seite $\ell(\cdot)$ mit stetigen, stückweise linearen Finiten Elementen. Folglich ist der Funktionswert am Knoten 5 als Durchschnitt der Funktionswerte der Knoten 2 und 4 gegeben.

Stellen Sie das lineare (6×6)-Gleichungssystem der Finite Elemente-Diskretisierung auf, und formen Sie es in ein äquivalentes (5×5)-Gleichungssystem um.

Aufgabe 2 (Tridiagonalmatrizen | 4 Punkte). Gegeben sei eine Tridiagonalmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \beta\gamma > 0.$$

Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\mathbf{D}$ gegeben sind durch

$$\lambda_k = \alpha + 2\sqrt{\beta\gamma}\,\operatorname{sign}(\beta)\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \qquad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Beweisen Sie ferner, dass für die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ die Darstellung

$$[\mathbf{v}_k]_i = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{i-1}{2}} \sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right), \qquad \text{für } i,k = 1, \dots, n$$

gilt, wobei $[\mathbf{v}_k]_i$ die i-te Komponente von $\mathbf{v}_k$ bezeichnet.

Aufgabe 3 (Eigenwerte des Laplace-Operators | 4 Punkte). Für zwei Matrizen $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{r\times s}$ ist das Kronecker-Produkt $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ definiert durch

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{1,1}\mathbf{B} & \cdots & a_{1,n}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}\mathbf{B} & \cdots & a_{m,n}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mr\times ns}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem, das bei der Diskretisierung der Poisson-Gleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } (0,1)^2, \\ u = 0 & \text{auf } \partial(0,1)^2, \end{cases}$$

durch den 5-Punkte-Finite-Differenzen-Stern zur Schrittweite $h = \frac{1}{n}$ entsteht, sich schreiben lässt als

$$(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{L})\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Dabei ist $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Einheitsmatrix und

$$\mathbf{L} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},$$

die Diskretisierung des eindimensionalen Laplace-Operators.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektorenvektoren des zweidimensionalen, diskretisierten Laplace-Operators.

Aufgabe 4 (Duffy-Trick | 4 Punkte). Seien $\Omega := (0,1)^2$ und $T := \{(x_1, x_2) \in \Omega \ : \ x_2 < x_1\}$. Wir definieren wie üblich die Polynomfamilien

$$\mathcal{P}_r := \left\{ x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ : \ 0 \le r_1 + r_2 \le r \right\}$$

sowie die leicht modifizierten Polynomfamilien

$$\mathcal{Q}_r' := \left\{ \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \ : \ 0 \le r_1 \le r+1,\, 0 \le r_2 \le r \right\}.$$

Seien weiter, für $i = 1, \dots, N$,

$$\boldsymbol{\zeta}^{(i)} = \left(\zeta_1^{(i)}, \zeta_2^{(i)}\right) \in \Omega, \qquad \omega^{(i)} \in \mathbb{R},$$

die Punkte und Gewichte einer beliebigen Quadraturformel, die für alle $q \in \mathcal{Q}_r'(\Omega)$ exakt ist. Zeigen Sie, dass die durch die Punkte und Gewichte

$$\mathbf{z}^{(i)} = \left(\zeta_1^{(i)}, \zeta_1^{(i)}\zeta_2^{(i)}\right) \in T, \qquad w^{(i)} = \omega^{(i)}\zeta_1^{(i)} \in \mathbb{R},$$

definierte Quadraturformel für alle $p \in \mathcal{P}_r(T)$ exakt ist. Welchen Fehler hat diese Quadraturformel bei der Quadratur der Funktion $p : T \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1^{-1}$?

Hinweis. *Transformationssatz mit Transformation* $F : \Omega \to T$, $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, \xi_1\xi_2)$.