Übungsblatt 7.

Bearbeiten bis: **Montag, 11.11.2024, 12:00**

Aufgabe 1 (Bramble-Hilbert-Lemma | 4 Punkte). Beweisen Sie das Bramble-Hilbert-Lemma für $m = 1$ und $\Omega = (0,1)^2$ unter der Voraussetzung, dass der Mittelungsoperator

$$I : H^1(\Omega) \to \mathcal{P}_0, \quad Iv := \int_\Omega v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

verwendet wird.

Aufgabe 2 (Interpolationsfehlerabschätzungen | 4 Punkte). Geben Sie die zu erwartenden Konvergenzordnungen in h-Potenzen an für die Knoteninterpolierenden aus $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$:

$$\|u - I_h u\|_{L^2(T)} \le ch^{?}|u|_{H^2(T)}, \qquad \left\|\nabla^2(u - I_h u)\right\|_{L^2(T)} \le ch^{?}|u|_{H^3(T)},$$

$$\sup_{\mathbf{x}\in T}\left|(u - I_h u)(\mathbf{x})\right| \le ch^{?}|u|_{H^3(T)}, \qquad \left\|\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(u - I_h u)\right\|_{L^2(\partial T)} \le ch^{?}|u|_{H^3(T)}.$$

Hinweis. ∇^2 *bezeichnet die Hesse-Matrix.*

Aufgabe 3 (Flussauswertung | 4 Punkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygonzug berandetes, konvexes Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Bezeichne u die Lösung der Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), \quad && \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= 0, && \mathbf{x} \in \Gamma := \partial\Omega. \end{aligned}$$

Der gewichtete Fluss von u ist definiert durch

$$F_\omega(u) := \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

für eine Gewichtsfunktion $\omega \in L^2(\Gamma)$.

(a) Sei $\tilde{\omega} \in H^1(\Omega)$ eine Erweiterung von ω, d.h. es gelte $\gamma(\tilde{\omega}) = \omega$. Zeigen Sie:

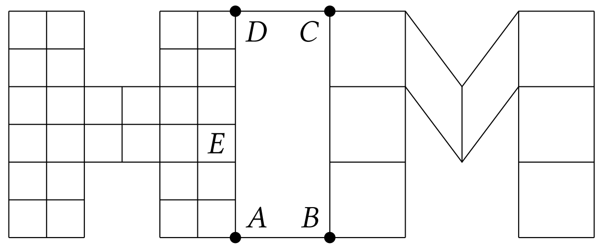
$$F_\omega(u) = \int_\Omega \left\langle \nabla u(\mathbf{x}), \nabla\tilde{\omega}(\mathbf{x})\right\rangle \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega f(\mathbf{x})\tilde{\omega}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{2}$$

(b) Seien u_h die Approximationen von u mittels linearer Finiter Elemente auf quasi-uniformen Gittern. Welche Konvergenzordnung bzgl. h-Potenzen ist für den Fehler in der Flussauswertung

$$\left|F_\omega(u) - F_\omega(u_h)\right|$$

zu erwarten, wenn dieser mit (??) resp. mit (??) berechnet wird?

Aufgabe 4 (Netzverfeinerung | 4 Punkte). Ein Teil eines Finite-Elemente-Netzes sei wie folgt gegeben:



Wir betrachten die noch zu vernetzende Region (A, B, C, D).

(a) Wandeln Sie das Netz ausserhalb der Region (A, B, C, D) in ein Dreiecksnetz um.

(b) Vernetzen Sie die Region (A, B, C, D) mit einem reinen Dreiecksnetz ohne hängende Knoten.

(c) Die Elemente in E seien als zu verfeinern markiert. Verfeinern Sie das Netz um E, ohne dass hängende Knoten entstehen. Es sollen aber möglichst wenig Dreiecke ausserhalb der zu verfeinernden Region verändert werden.

(d) Wiederholen Sie die Punkte (b) und (c) für reine Vierecksnetze.