# Übungsblatt 6.

Bearbeiten bis: **Montag, 04.11.2024, 12:00**

**Aufgabe 1** (Dualitätsargument | 4 Punkte). Auf dem zweiten Programmierblatt ist zu beobachten, dass die approximierte Lösung $u_h$ und die exakte Lösung $u$ die Eigenschaft $\int_\Omega u - u_h \,\mathrm{d}x = \mathcal{O}\big(h^2\big)$ erfüllen. Seien nun $\Omega = (0,1)^2$, $f \in L^2(\Omega)$ und das Variationsproblem mit homogenen Dirichlet-Daten

$$\text{finde } u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{so dass} \quad \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega)$$

gegeben. Zeigen Sie die Beobachtung aus dem Programmierblatt in diesem Fall, ohne die Resultate der Sätze aus Kapitel 6 des Skriptes zu benutzen. Betrachten Sie stattdessen eine Funktion $\psi \in H^2(\Omega)$, die die Eigenschaft

$$a(v,\psi) = (v,1)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega)$$

erfüllt.

**Aufgabe 2** ($L^2$-Projektion | 4 Punkte). Gegeben sei das $L^2$-Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \int_I f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ für $I = [0,1]$. Zeigen Sie:

(a) Jede Funktion $u \in C(I)$ mit

$$\langle u, q\rangle = 0 \quad \text{für alle } q \in \mathcal{P}_r$$

besitzt mindestens $r+1$ Nullstellen in $I$. Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}_r$ den Raum der Polynome vom Grad $\leq r$.

(b) Die $L^2$-Projektion $\Pi : C(I) \to \mathcal{P}_r$, definiert durch

$$\langle u - \Pi u, q\rangle = 0 \quad \text{für alle } q \in \mathcal{P}_r,$$

erfüllt die Fehlerabschätzung

$$\|u - \Pi u\|_{L^\infty(I)} \leq \frac{1}{(r+1)!}\big\|u^{(r+1)}\big\|_{L^\infty(I)} \quad \text{für alle } u \in C^{r+1}(I).$$

**Aufgabe 3** (Interpolation | 4 Punkte). Sei $\mathcal{T}$ eine beliebige Triangulierung eines polygonalen Gebiets $\Omega$ und

$$V_{\mathcal{T}} := \Big\{ u \in C(\overline{\Omega}) \,:\, u\big|_T \in \mathcal{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T} \Big\}$$

der Raum der stetigen, stückweise linearen Finite-Element-Funktionen. Zeigen Sie, dass es keine Interpolation

$$I_{\mathcal{T}} : C^\infty(\overline{\Omega}) \to V_{\mathcal{T}}$$

gibt, welche $L^2(\Omega)$-stabil ist. Dies bedeutet, es gibt keine Interpolation, welche der Ungleichung

$$\|I_{\mathcal{T}} v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer positiven Konstante $c$ für alle $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ genügt.

**Aufgabe 4** (Kondition der Systemmatrix | 4 Punkte). Wir wollen die Kondition einer Finite-Elemente-Matrix abschätzen. Dazu betrachten wir das Poisson-Problem auf einem polygonalen Gebiet $\Omega$ und den Raum $V_h$ der stetigen, stückweise linearen Finite-Element-Funktionen auf einer quasi-uniformen Triangulierung von $\Omega$. Ferner sei $v_h = \sum_{i=1}^{n} v_i \varphi_i \in V_h$ beliebig.

(a) Zeigen Sie $a(v_h, v_h) \leq Ch^{-2} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2$.

(b) Beweisen Sie für $\mathbf{v}_h = [v_i]_{i=1}^{n}$, dass

$$ch^2 \|\mathbf{v}_h\|_2^2 \leq \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch^2 \|\mathbf{v}_h\|_2^2.$$

(c) Zeigen Sie, dass sich die Konditionszahl der Finite-Elemente-Matrix maximal wie $\mathcal{O}(h^{-2})$ verhält.