Übungsblatt 5.

Bearbeiten bis: **Montag, 28.10.2024, 12:00**

Aufgabe 1 (baryzentrische Koordinaten II | 4 Punkte). Betrachten Sie auf dem Referenzdreieck T_{ref} mit baryzentrischen Koordinaten $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ für festes $k \in \mathbb{N}$ die Lagrange-Knotenmenge vom Grad k, gegeben durch

$$X_k := \left\{ \mathbf{x}_{i,j,k} := \left(\frac{i}{k}, \frac{j}{k}, \frac{k-i-j}{k} \right) \,\middle|\, 0 \le i + j \le k \right\}.$$

Bekanntlich sind dies $n = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ verschiedene Punkte.

(a) Zeigen Sie, dass je $n-1$ dieser Punkte auf k Linien der Form

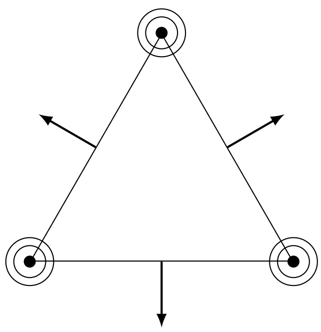
$$L_i^s := \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in T_{\text{ref}} \,\middle|\, \lambda_s = \frac{i}{k} \right\} \text{ für } 0 \le i < k \text{ und } 0 \le s \le 2,$$

also auf Parallelen zu den Kanten von T_{ref}, liegen.

(b) Geben Sie die nodale Basis von $\mathcal{P}_k(T_{\text{ref}})$ zu den obigen Punkten $\{\mathbf{x}_{i,j,k}\}$ in baryzentrischen Koordinanten an.

Aufgabe 2 (Argyris-Dreieck | 4 Punkte).

(a) Zeigen Sie, dass zu gegebenen Funktionswerten, ersten und zweiten Ableitungen in den Eckpunkten eines Dreiecks T genau ein Polynom $p \in \mathcal{P}_5$ gibt, das mit den vorgegebenen Daten an den Ecken übereinstimmt und dessen Normalableitungen an den Seitenmitten einen vorgegebenen Wert annehmen. Dieses Element heisst Argyris-Dreieck.



(b) Es sei $\mathcal{T}$ eine Zerlegung des Gebiets Ω in Dreiecke und

$$V := \Big\{ v : \Omega \to \mathbb{R} \,\Big|\, \text{für alle } T \in \mathcal{T} \text{ ist } v|_T \in \mathcal{P}_5 \text{ und Funktionswerte, 1. und 2. Ableitungen stimmen in den Knoten überein, und die Werte der Normalableitungen an den Seitenmitten stimmen überein} \Big\}$$

der zugehörige Finite-Element-Raum. Zeigen Sie, dass $V \subset C^1(\overline{\Omega})$ gilt.

Aufgabe 3 (Seminormen $|\cdot|_{H^1(\Omega)}, \dots, |\cdot|_{H^{k-1}(\Omega)}$ | 4 Punkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand und $k \geq 1$. Sei $\mathcal{P}_k$ der Raum der Polynome von Grad k, d.h. es gilt: $v \in \mathcal{P}_k \Leftrightarrow \partial^\alpha v = 0$ für alle $|\alpha| = k+1$.

(a) Zeigen Sie, dass $C > 0$ existiert, so dass für alle $u \in H^k(\Omega)$ gilt

$$\inf_{v \in \mathcal{P}_{k-1}} \|u - v\|_{H^k(\Omega)} \leq C|u|_{H^k(\Omega)}.$$

Hinweis. *Sei $\Pi : L^2(\Omega) \to \mathcal{P}_{k-1}$ die $L^2(\Omega)$-Orthoprojektion. Zeigen Sie durch einen Widerspruchsbeweis: Es existiert $C > 0$, so dass für alle $u \in H^k(\Omega)$ gilt*

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} \leq C\left[|u|_{H^k(\Omega)} + \|\Pi u\|_{L^2(\Omega)}\right].$$

Ausserdem besitzt eine beschränkte Folge in $H^k(\Omega)$ eine konvergente Teilfolge in $L^2(\Omega)$.

(b) Zeigen Sie nun, dass $C > 0$ existiert, so dass für alle $u \in H^k(\Omega)$ gilt

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} \leq C\left[|u|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right].$$

Aufgabe 4 (variable Koeffizienten | 4 Punkte). Betrachten Sie das Poisson-Problem mit variablem Koeffizienten $a \in L^\infty(\Omega)$:

$$-\operatorname{div}(a \nabla u) = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \Gamma := \partial\Omega.$$

Dieses Problem sei mittels stetiger, stückweise linearer Finiter Elemente auf einem Dreiecksnetz $\mathcal{T}$ diskretisiert. Zeigen Sie, dass man die gleiche Lösung u_h erhält unabhängig davon, ob man a als variabel auf jedem Element $T \in \mathcal{T}$ der Triangulierung ansieht oder auf jedem Dreieck durch eine konstante Funktion ersetzt. Wie sind die Konstanten hierzu zu berechnen?