Übungsblatt 3.

Bearbeiten bis: **Montag, 14.10.2024, 12:00**

Aufgabe 1 (Helmholtz-Gleichung | 4 Punkte). Sei $\Omega = (0, 1)$. Zur Lösung der Helmholtz-Gleichung

$$-\Delta u(x) - \omega^2 u(x) = 1, \qquad u(0) = u(1) = 0$$

betrachten wir für $h := \frac{1}{N}$ die Punkte $x_j = jh$, $j = 1, \dots, N$, und stückweise lineare Basisfunktionen.

(a) Berechnen Sie das aus der Diskretisierung resultierende resultierende Gleichungssystem $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} := \left[a(\phi_j, \phi_i)\right]_{i,j}, \qquad \mathbf{b} := \left[\langle f, \phi_j \rangle_{L^2(\Omega)}\right]_j.$$

(a) Zeigen Sie, dass für hinreichend kleine $h > 0$ die Matrix $\mathbf{A}$ invertierbar ist.

Hinweis. *Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass die Eigenwerte von*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & a & b \\ & & & c & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$$

gegeben sind durch $\lambda_k = a - 2\sqrt{bc}\cos(\frac{k\pi}{N})$, $1 \le k \le N-1$.

Aufgabe 2 (Neumann-Problem | 4 Punkte). Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon und $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_M\}$ eine Zerlegung von Ω in Dreieck- oder Viereckelementen. Weiter seien $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$ Funktionen, welche die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g \,\mathrm{d}S = 0$$

erfüllen. Seien $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ die voneinander verschiedenen Eckpunkte der Elemente $T_1, \dots, T_M$, V_N der Ansatzraum, welcher von der nodalen Basis aufgespannt wird, und $\mathcal{H}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \bar{u} = 0\}$. Seien nun $\mathcal{V} := V_N \cap \mathcal{H}^1(\Omega)$ und die folgende Variationsaufgabe gegeben:

$$\text{Finde } u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \text{ so dass } \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g v \,\mathrm{d}\mathbf{x} \text{ für alle } v \in \mathcal{H}^1(\Omega). \tag{1}$$

Zeigen Sie:

(a) Die Diskretisierung von (??) mittels $\mathcal{V}$ ist äquivalent zum Lösen eines Gleichungssystems der folgenden Form:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{p}^\mathsf{T} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\mathbf{p}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$. Geben Sie die auftretenden Matrizen und $\ker \mathbf{A}$ an.

(b) Die Matrix Lösung $\mathbf{u}$ von (??) kann durch das Lösen des Systems

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

gefunden werden, wobei die Systemmatrix regulär ist.

Aufgabe 3 (Baryzentrische Koordinaten | 4 Punkte). Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein nichtentartetes Dreieck mit den Eckpunkten $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes $\mathbf{p} = (x, y) \in T$ sind dann gegeben durch den eindeutigen Lösungsvektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^\top$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass sich die Restriktionen der nodalen Basisfunktionen auf das Dreieck T in baryzentrischen Koordinaten schreiben lassen als

$$\varphi_1(x, y) = \lambda_1(x, y), \quad \varphi_2(x, y) = \lambda_2(x, y), \quad \varphi_3(x, y) = \lambda_3(x, y).$$

Dabei bezeichnen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, die mit den entsprechenden Ecken des Dreiecks assoziierten Basisfunktionen.

Aufgabe 4 (Lemma von Strang | 4 Punkte). Seien V ein Hilbert-Raum und $W \subset V$ ein abgeschlossener, linearer Unterraum. Seien weiter a, b Bilinearformen auf V bzw. W und $\ell \in V'$ und $m \in W'$, wobei a V-elliptisch ist mit der Konstante $c_a > 0$ und b W-elliptisch ist mit der Konstante $c_b > 0$. Schliesslich seien $u_0 \in V$ und $u_1, u_2, u_3 \in W$ die Lösungen der Variationsprobleme:

$$\begin{aligned}
&\text{Suche } u_0 \in V, \text{ so dass} \quad a(u_0, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in V, \\
&\text{suche } u_1 \in W, \text{ so dass} \quad a(u_1, w) = \ell(w) \quad \text{für alle } w \in W, \\
&\text{suche } u_2 \in W, \text{ so dass} \quad a(u_2, w) = m(w) \quad \text{für alle } w \in W, \\
&\text{suche } u_3 \in W, \text{ so dass} \quad b(u_3, w) = m(w) \quad \text{für alle } w \in W.
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\|u_2 - u_1\|_V \leq \frac{\|m - \ell\|_{W'}}{c_a}.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\|u_3 - u_2\|_V \leq \frac{\|a - b\|_{B(W;W')}}{c_b} \|u_2\|_V.$$

(c) Schliessen Sie, dass

$$\begin{aligned}
\|u_3 - u_0\|_V \leq{}& \frac{\|a - b\|_{B(W;W')}}{c_b} \left(\frac{\|m - \ell\|_{W'}}{c_a} + \frac{\|a\|_{B(V;V')}}{c_a} \inf_{w \in W} \|u_0 - w\|_V + \|u_0\|_V \right) \\
&+ \frac{\|m - \ell\|_{W'}}{c_a} + \frac{\|a\|_{B(V;V')}}{c_a} \inf_{w \in W} \|u_0 - w\|_V.
\end{aligned}$$

Hinweis. *Seien X, Y Banach-Räume, dann bezeichnen wir mit $B(X; Y)$ den Banach-Raum aller stetigen, linearen Operatoren von X nach Y mit der (kanonischen Norm)*

$$\|F\|_{B(X;Y)} := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|F(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Insbesondere ist $X' = B(X; \mathbb{R})$.