Übungsblatt 2.

Bearbeiten bis: **Montag, 07.10.2024, 12:00**

Aufgabe 1 (Variationsrechnung im Endlichdimensionalen | 4 Punkte). Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix.

(a) Für $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sei $\mathbf{y}^\intercal \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\intercal \mathbf{b}$ für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Folgern Sie, dass $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt.

(b) Wir definieren das Funktional

$$J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \mapsto J(\mathbf{v}) := \tfrac{1}{2}\mathbf{v}^\intercal \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{b}^\intercal \mathbf{v}.$$

Ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ heisst *stationär*, falls

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\Big|_{t=0} = 0$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt. Zeigen Sie, dass die stationären Punkte von J die Gleichung $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ erfüllen.

(c) Beweisen Sie, dass es genau einen stationären Punkt von J gibt, der gleichzeitig absolutes Minimum ist.

Aufgabe 2 (Koordinatentransformation | 4 Punkte). Es seien $\Omega, \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ beschränkte, offene Mengen und $\Phi : \hat{\Omega} \to \Omega$ ein Diffeomorphismus. Für $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}$ bezeichne $\mathbf{x} := \Phi(\hat{\mathbf{x}}) \in \Omega$ den transportierten Punkt. Zeigen Sie, dass für $u \in C^1(\Omega)$ die Beziehung

$$\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \Phi(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}}\right]^{-\intercal} \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{u}(\hat{\mathbf{x}}),$$

wobei $\hat{u}(\hat{\mathbf{x}}) := u(\mathbf{x})$, gilt.

Aufgabe 3 (Variationsformulierung | 4 Punkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u + \langle \mathbf{b}, \nabla u\rangle + cu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ und $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Schreiben Sie die zugehörige Variationsformulierung

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega)$$

auf, wobei $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform und $\ell : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional ist.

(b) Zeigen Sie die Stetigkeit der Bilinearform auf $H^1(\Omega)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Bilinearform elliptisch auf $H_0^1(\Omega)$ ist, falls $\mathbf{b}$ konstante Länge 1 besitzt und $c = 1$ ist.

Aufgabe 4 (Spuroperator | 4 Punkte). Seien

$$\Omega^- = (-1,0)\times(-1,1), \quad \Omega^+ = (0,1)\times(-1,1)$$

und $u : (-1,1)^2 \to \mathbb{R}$ mit $u|_{\Omega^\pm} \in H^1(\Omega^\pm)$ gegeben. Seien $\gamma^\pm$ die Spuroperatoren auf $\Omega^\pm$. Beweisen Sie, dass gilt:

$$u \in H^1\big((-1,1)^2\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma^+ u = \gamma^- u \quad \text{auf } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-.$$

Hinweis. *Verwenden Sie den Gaußschen Integralsatz.*