Übungsblatt 12.

Bearbeiten bis: **Montag, 16.12.2024, 12:00**

Aufgabe 1 (Clément-Operator | 4 Punkte). Sei $\mathcal{T}$ eine nicht entartete Triangulierung und

$$\omega_T := \bigcup_{T' \in \mathcal{T}\,:\, T \cap T' \neq \emptyset} T'$$

die Vereinigung aller Elemente, deren Schnitt mit $T \in \mathcal{T}$ nichtleer ist. Konstruieren Sie zu einer gegebenen Funktion $v \in H^1(\Omega)$ gemäss Clément eine stückweise konstante Funktion $v_h \in \mathcal{S}_h^0(\mathcal{T}) := \left\{ v \in L^2(\Omega) \,:\, v|_T \in \mathcal{P}_0 \text{ für alle } T \in \mathcal{T} \right\}$ mit

$$\|v - v_h\|_{L^2(T)} \leq c h_T \|v\|_{H^1(\omega_T)}.$$

Aufgabe 2 (Datenoszillation | 4 Punkte). Sei $\mathcal{T}$ eine nicht entartete Triangulierung des Polygongebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Für jedes Element $T \in \mathcal{T}$ ist die L^2-Projektion $Q_T u \in \mathcal{P}_0$ einer Funktion $u \in L^2(T)$ definiert via

$$(Q_T u, \mathbf{1})_{L^2(T)} = (u, \mathbf{1})_{L^2(T)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $u \in L^2(\Omega)$ und $T \in \mathcal{T}$ gilt

$$\|u - Q_T u\|_{L^2(T)} \leq C \|u\|_{L^2(T)}$$

und für alle $u \in H^1(T)$ und $T \in \mathcal{T}$ gilt

$$\|u - Q_T u\|_{L^2(T)} \leq C h_T \|u\|_{H^1(T)}.$$

(b) Die Triangulierung sei sogar quasi-uniform. Was bedeutet dieses Resultat dann für die Datenoszillation

$$\operatorname{osc}(f, \mathcal{T}) := \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|f - Q_T f\|_{L^2(T)}^2}$$

falls $f \in L^2(\Omega)$ oder $f \in H^1(\Omega)$ ist?

Aufgabe 3 (Bilinearformen | 4 Punkte). Betrachten Sie das Poisson-Problem auf einem durch einen Polygonzug berandeten Gebiet. Diskretisiert werde mit $\mathcal{P}_r$-Elementen für $r \geq 1$. Sei $a(\cdot,\cdot) \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ die zugehörige Bilinearform und $a_h(\cdot,\cdot) \,:\, V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ eine mit numerischem Quadraturfehler behaftete Bilinearform. Für ein $s > 0$ gelte

$$\left| a(v,v) - a_h(v,v) \right| \leq c h^s |v|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{für alle } v \in V_h.$$

(a) Wie wirkt sich dieser Fehler auf $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ aus?

(b) Welche Ordnung sollte die Quadraturformel in Abhängigkeit von r haben, damit bei der Konvergenz keine Einbusse stattfindet?

Aufgabe 4 (Wellengleichung | 4 Punkte). Zur Approximation der homogenen Wellengleichung $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ seien das Gitter

$$\Omega_{h,\delta} := \big\{ (x_j, t_k) := (jh,\ k\delta) \,:\, j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \big\}$$

und das implizite Differenzverfahren

$$\frac{\mathbf{u}^{k+1} + 2\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}}{\delta^2} = \theta \Delta_h \mathbf{u}^{k+1} + (1 - 2\theta)\Delta_h \mathbf{u}^k + \theta \Delta_h \mathbf{u}^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}$$

gegeben, wobei $0 \leq \theta \leq 1$ und

$$\Delta_h u(x,t) := \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}.$$

Berechnen Sie für $\theta \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ den Konsistenzfehler von

$$\tau_{h,\delta}(x_j, t_k) := (\partial_t^2 - \Delta)u(x_j,t_k) - \Bigg(\frac{u(x_j,t_{k+1}) - 2u(x_j,t_k) + u(x_j,t_{k-1})}{\delta^2} - \theta \Delta_h u(x_j,t_{k+1}) - (1-2\theta)\Delta_h u(x_j,t_k) - \theta \Delta_h u(x_j,t_{k-1}) \Bigg).$$