Übungsblatt 1.

Bearbeiten bis: **Montag, 30.09.2024, 12:00**

Aufgabe 1 (H^1-Funktionen | 4 Punkte).

(a) Sei $u \in C([a,b])$ stückweise stetig differenzierbar, das heisst, es gibt eine Partition von $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, so dass $u|_{[x_{i-1},x_i]} \in C^1([x_{i-1},x_i])$ für $i = 1,\ldots,n$ ist. Beweisen Sie, dass $u \in H^1((a,b))$.

(b) Zeigen Sie, dass auf der Einheitskreisscheibe $B_1(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| < 1\}$ gilt:

$$u(\mathbf{x}) = \log\left(\log \frac{2}{\|\mathbf{x}\|}\right) \in H^1(B_1(\mathbf{0})).$$

(c) Zeigen Sie, dass auf der Einheitskugel $B_1(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| < 1\}$ für alle $\beta < \frac{1}{2}$ gilt:

$$u(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{-\beta} \in H^1(B_1(\mathbf{0})).$$

Aufgabe 2 (Poincaré-Friedrichssche Ungleichung | 4 Punkte). Sei $\square := (0,s)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie für alle $u \in H^1(\square)$, dass

$$\|u\|^2_{L^2(\square)} \leq s^2|\bar{u}|^2 + 2s^2|u|^2_{H^1(\square)}, \quad \bar{u} := \frac{1}{|\square|}\int_\square u(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Hinweis. *Man betrachte zuerst den Fall $\bar{u} = 0$ und verwende die Formel*

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y}) + \int_{y_1}^{x_1} \partial_{x_1} u(t, y_2)\,\mathrm{d}t + \int_{y_2}^{x_2} \partial_{x_2} u(x_1, t)\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 3 (Dichtheitsargumente | 4 Punkte). Sei X ein normierter Vektorraum und $\tilde{X} \subset X$ ein dichter Teilraum. Sei Y ein Banach-Raum.

(a) Sei $\tilde{\phi} : \tilde{X} \to Y$ eine beschränkte, lineare Abbildung, das heisst, es existiere ein $C > 0$, so dass

$$\|\tilde{\phi}(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad x \in \tilde{X}.$$

Zeigen Sie, dass sich dann $\tilde{\phi}$ in eindeutiger Weise zu einer stetigen linearen Abbildung ϕ auf X fortsetzen lässt, das heisst, es existiert eine Abbildung $\phi : X \to Y$, so dass $\phi|_{\tilde{X}} = \tilde{\phi}$ und $\|\phi\|_{X\to Y} = C$.

(b) Sei $\tilde{a} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Bilinearform, das heisst, es existiere ein $C > 0$, so dass

$$|\tilde{a}(x,x')| \leq C\|x\|_X\|x'\|_X, \quad x, x' \in \tilde{X}.$$

Zeigen Sie, dass sich $\tilde{a}$ eindeutig zu einer stetigen Bilinearform a auf $X \times X$ fortsetzen lässt, das heisst, es existiere eine Bilinearform $a : X \times X \to \mathbb{R}$, so dass $a|_{\tilde{X}\times\tilde{X}} = \tilde{a}$ und $|a(x,x')| \leq C\|x\|_X\|x'\|_X$ für alle $x, x' \in X$.

Aufgabe 4 (Einbettung | 4 Punkte). Ein Banach-Raum $X \subset Y$ ist stetig eingebettet in einen Banach-Raum Y, falls gilt

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X \quad x \in X.$$

Die Einbettung heisst kompakt, falls jede beschränkte Folge aus X eine in Y konvergente Teilfolge enthält.

Zeigen Sie, dass der Raum ℓ^1 der absolut summierbaren Folgen stetig in den Raum ℓ^2 der quadratisch summierbaren Folgen eingebettet ist. Ist diese Einbettung auch kompakt? Begründen Sie Ihre Antwort.