Übungsblatt 0.

Bearbeiten bis: **Montag, 23.09.2024, 12:00 Uhr**

Aufgabe 1 (Charakterisierung von Differentialgleichungen | 4 Punkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Gebiet. Betrachten Sie den linearen Differentialoperator zweiter Ordnung, $\mathcal{L} : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$, gegeben durch

$$(\mathcal{L}u)(\mathbf{x}) := -\sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{2} b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}).$$

Bestimmen Sie den Typ des Differentialoperators (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch) mit den folgenden Konstanten, jeweils in Abhängigkeit des Parameters $y \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\left[a_{i,j}(\mathbf{x})\right]_{i,j=1}^{2} := \begin{bmatrix} y & \sqrt{2(y-1)} \\ \sqrt{2(y-1)} & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[b_i(\mathbf{x})\right]_{i=1}^{2} := \begin{bmatrix} y^2 \\ \|\mathbf{x}\|_2^2 \end{bmatrix}, \quad c(\mathbf{x}) := 0.$$

Aufgabe 2 (Banach-Räume | 4 Punkte). Sei $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall und $C^k(I)$ der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen von I nach $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$, dass $C^k(I)$ bezüglich der Norm

$$\|f\| := \max_{0 \le \ell \le k} \left(\max_{x \in I} \left| f^{(\ell)}(x) \right| \right)$$

ein Banach-Raum ist.

(b) Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$ dass $C^k(I)$ bezüglich der Norm

$$\|f\|_{L^p(I)} := \left(\int_I |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

kein Banach-Raum ist.

Aufgabe 3 (Schwache Ableitungen I | 4 Punkte).

(a) Sei $u \in C^1([0,1])$. Zeigen Sie, dass dann schwache und klassische Ableitung von u übereinstimmen.

(b) Sei $\Omega = (-1,1)$ und $u(x) = |x|$ für $x \in \Omega$. Zeigen Sie, dass u die schwache Ableitung

$$u'(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } -1 < x < 0, \\ 1, & \text{falls } 0 \le x < 1, \end{cases}$$

besitzt. Zeigen Sie ferner, dass u' keine schwache Ableitung besitzt.

(c) Sei Ω wie oben. Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $u \in C(\overline{\Omega})$ an, welche nicht in $H^1(\Omega)$ enthalten ist.

Aufgabe 4 (Schwache Ableitungen II | 4 Punkte). Sei $I = (a, b)$ ein offenes Intervall. Zeigen Sie:

(a) Ist $u \in H^1(I)$, so gilt

$$u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} u'(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für fast alle } x_1 < x_2 \in I.$$

(b) Sind umgekehrt $u, v \in L^2(I)$ und gilt

$$u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} v(x)\,\mathrm{d}x$$

für fast alle $x_1 < x_2 \in I$, so ist $u \in H^1(I)$ und v ist die schwache Ableitung von u.