# Bonusblatt 12.

**ohne Abgabe***

**Aufgabe 1** (Steifigkeit | 4 Bonuspunkte)**.**

Überprüfen Sie, ob die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -140641 & 187488 \\ 187488 & -250009 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -13 \\ 12 \end{bmatrix}$$

steif ist, indem Sie ihren Steifigkeitsquotient berechnen.

**Aufgabe 2** (implizite Mittelpunktsregel | 4 Bonuspunkte)**.**

Betrachten Sie die implizite Mittelpunktsregel

$$\begin{aligned} k^{(i)} &= f\big(t_i + 1/2h, \eta_i + 1/2hk^{(i)}\big), \\ \eta_{i+1} &= \eta_i + hk^{(i)}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses Verfahren konsistent von der Ordnung 2 ist.

(b) Zeigen Sie, dass dieses Verfahren A-stabil ist.

**Aufgabe 3** (Nyström-Verfahren | 4 Bonuspunkte)**.**

(a) Leiten Sie das 3-Schritt Nyström-Verfahren aus der zugrundeliegenden Integralgleichung her.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass das 3-Schritt Nyström-Verfahren A-stabil ist.

**Aufgabe 4** (Maximumprinzip | 4 Bonuspunkte)**.**

Für die klassische Lösung der Randwertaufgabe

$$-\Delta u = 1 \text{ in } \Omega, \qquad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

auf einem glatt berandeten Gebiet $\Omega \subset (0,1) \times (0,1)$ zeige man mit Hilfe des Maximumprinzips die Einschliessung $0 \leq u(\mathbf{x}) \leq 1/8$.

Hinweis. *Man vergleiche $u$ mit der quadratischen Funktion*

$$v(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}x_1(1-x_1) + \frac{1}{4}x_2(1-x_2).$$

**Aufgabe 5** (Tridiagonalmatrizen | 4 Bonuspunkte)**.**

Gegeben sei eine Tridiagonalmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \beta\gamma > 0.$$

*Falls Ihnen noch Punkte zur Erreichung der 50%-Grenze fehlen, können Sie die Aufgaben bis *Montag, 14.12.2020, 12:00 Uhr* abgeben.

Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\mathbf{D}$ gegeben sind durch

$$\lambda_k = \alpha + 2\sqrt{\beta\gamma}\,\operatorname{sign}(\beta)\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \qquad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Beweisen Sie ferner, dass für die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ die Darstellung

$$\mathbf{v}_{k,i} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{i-1}{2}} \sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right), \qquad \text{für } i, k = 1, \dots, n$$

gilt, wobei $\mathbf{v}_{k,i}$ die $i$-te Komponente von $\mathbf{v}_k$ bezeichnet. Berechnen Sie damit die Eigenwerte und -vektoren des diskretisierten Laplace-Operators auf dem Einheitsintervall $(0, 1)$.

**Aufgabe 6** (Givens-Rotationen | 4 Bonuspunkte)**.**

Sei

$$\mathbf{G}(\theta) := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die durch $\mathbf{G}(\theta)$ induzierte lineare Abbildung beschreibt eine Drehung um den Winkel $\theta$ gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene. Wenden Sie dazu $\mathbf{G}(\theta)$ auf $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ an.

(b) $\mathbf{G}(\theta)$ ist eine orthogonale Matrix.

(c) Für vorgegebenes $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bewirkt die Wahl

$$c = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \qquad s = \frac{-v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

dass $\mathbf{G}(\theta)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \star \\ 0 \end{bmatrix}$ ist.

(d) Sei $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Hessenberg-Matrix, d.h. es gilt $a_{i,j} = 0$ für alle $i > j + 1$. Dann lässt sich $\mathbf{H}$ durch die Anwendung von $n$ geeignet gewählten *Givens-Rotationen*

$$\mathbf{G}(i, j, \theta) = \left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& c &&&& -s &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& s &&&& c &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

auf eine obere Dreiecksmatrix transformieren.