Universität Basel

Prof. Dr. H. Harbrecht
M. Schmidlin

Numerik der Differentialgleichungen Herbstsemester 2020

Übungsblatt 11.

Abgabe bis: **Montag, 07.12.2020, 12:00**

Aufgabe 1 (zentrale Differenzenquotienten | 4 Punkte)**.**

Gegeben sei das Randwertproblem

$$y'(x) = f(x), \quad x \in (a,b), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

Berechnen Sie mit Hilfe von zentralen Differenzen Näherungswerte u_i für die exakten Werte $y(x_i)$ mit $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $x_i := a + ih$ und $h := (b-a)/n$. Wie lautet das resultierende Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$? Zeigen Sie, dass die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ für gerades n singulär ist.

Aufgabe 2 (Mehrstellenverfahren I | 4 Punkte)**.**

Zeigen Sie, dass die Differenzensterne

$$-\Delta_h u = \frac{1}{6h^2}\begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}_\star u, \qquad R_h f = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} & 1/2 & \\ 1/2 & 4 & 1/2 \\ & 1/2 & \end{bmatrix}_\star f$$

für $u \in C^6(\overline{\Omega})$ und $f \in C^4(\overline{\Omega})$ den Gleichungen

$$\Delta_h u(\mathbf{x}) = \Delta u(\mathbf{x}) + \frac{h^2}{12}\Delta^2 u(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(h^4),$$
$$R_h f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \frac{h^2}{12}\Delta f(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(h^4),$$

genügen.

Aufgabe 3 (Mehrstellenverfahren II | 4 Punkte)**.**

Auf einem Würfelgebiet Ω sei die Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \qquad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

gesucht. Wie können die oben definierten Sterne zur numerischen Lösung eingesetzt werden? Welche Konsistenzordung besitzt das entstehende Verfahren?