Universität Basel

Prof. Dr. H. Harbrecht
M. Schmidlin

Numerik der Differentialgleichungen Herbstsemester 2020

Übungsblatt 10.

Abgabe bis: **Montag, 30.11.2020, 12:00**

Aufgabe 1 (Abhängigkeit von den Daten | 4 Punkte)**.**

Für den gleichmässig elliptischen Differentialoperator

$$(\mathcal{L}u)(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) - \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(\mathbf{x})u_{x_i,x_j}(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad c(\mathbf{x}) \geq 0$$

betrachten wir auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ das Randwertproblem

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Zeigen Sie die stetige Abhängigkeit der Lösung sowohl von den Randdaten als auch von der rechten Seite.

Aufgabe 2 (Differenzenverfahren | 4 Punkte)**.**

Gegeben sei das Randwertproblem

$$y''(x) - p(x)y'(x) - q(x)y(x) = r(x), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

mit $q(x) \geq q_0 > 0$ für $a \leq x \leq b$. Gesucht sind Näherungswerte u_i für die exakten Werte $y(x_i)$ mit $i = 1, \ldots, n$, $x_i = a + ih$ und $h := \frac{b-a}{n+1}$. Approximiert man

$$y'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \qquad y''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

für alle $i = 1, \ldots, n$ und setzt man weiter $u_0 = \alpha$ und $u_{n+1} = \beta$, so erhält man aus der Differentialgleichung ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$$

für den Vektor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}^\intercal$. Bestimmen Sie $\mathbf{A}$ und $\mathbf{f}$.

Aufgabe 3 (Typinvarianz gegenüber Koordinatentransformation | 4 Punkte)**.**

Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und ein elliptischer oder hyperbolischer, linearer Differentialoperator $\mathcal{L}$ zweiter Ordnung

$$(\mathcal{L}u)(\mathbf{x}) = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(\mathbf{x})\frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j}u(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{d} b_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}),$$

der für $\mathbf{x} \in \Omega$ definiert ist. Sei $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ ein weiteres Gebiet. Die Transformation $\Phi\colon \Omega \to \hat{\Omega}$ habe in $\mathbf{x}$ eine nichtsinguläre Funktionalmatrix $\mathbf{S} = \mathrm{D}\,\Phi \in C^1(\Omega)$.
Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

ihren Typ in $\mathbf{x}$ nicht ändert, wenn sie in den neuen Koordinaten $\boldsymbol{\xi} = \Phi(\mathbf{x})$ geschrieben wird.

Hinweis. *Zeigen Sie zunächst, dass die Matrix* $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ *nach der Transformation zu* $\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^\intercal$ *wird.*

Aufgabe 4 (Differenzensterne | 4 Punkte)**.**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Gebiet und $u \in C^4(\overline{\Omega})$. Es sei $x_\pm := x \pm h/2$, und auch $y_\pm$, $z_\pm$ sowie $w_\pm$ seien analog definiert. x, y, z, w seien weiter so gewählt, dass $[z_-, z_+] \times [w_-, w_+] \subset \overline{\Omega}$ und $[x_-, x_+] \times [y_-, y_+] \subset \overline{\Omega}$ gelten.

(a) Zeigen Sie: $u_{xy}(z, w) = \dfrac{1}{h^2}\big[u(z_+, w_+) - u(z_-, w_+) - u(z_+, w_-) + u(z_-, w_-)\big] + \mathcal{O}(h^2)$.

(b) Zeigen Sie: $u_{xy}(x, y) = \dfrac{1}{2}\big[u_{xy}(x_-, y_-) + u_{xy}(x_+, y_+)\big] + \mathcal{O}(h^2)$.

(c) Folgern Sie daraus, dass sich die gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ bis auf $\mathcal{O}(h^2)$ durch den Differenzenstern

$$\frac{1}{2h^2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_\star$$

approximieren lassen.