Übungsblatt 9.

Abgabe bis: **Montag, 16.11.2020, 12:00**

Aufgabe 1 (Fundamentallemma der Variationsrechnung | 4 Punkte).

Gegeben seien ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und zwei Funktionen $f, g \in C(\Omega)$. Zeigen Sie, dass aus

$$\int_V f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_V g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{für alle } V \subset \Omega$$

$f = g$ folgt.

Hinweis. *Nehmen Sie an, dass es ein $\mathbf{x} \in \Omega$ mit $f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})$ gibt, und führen Sie dies zu einem Widerspruch.*

Aufgabe 2 (Charakterisierung von partiellen Differentialgleichungen | 4 Punkte).

(a) Bestimmen Sie den Typ (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch) der folgenden partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$-4u_{xx} - 3u_{xy} - u_{yx} - u_{yy} + 3u_x - u_y + 2u = 0,$$
$$-3u_{xx} + 12u_{xy} + 2u_{yy} - 6u_x + u_y + u = 0.$$

(b) Bestimmen Sie die Bereiche der (x, y)-Ebene, in denen die Gleichung

$$(1 + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + u_x = 0$$

elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist. Stellen Sie diese Flächen graphisch dar.

Aufgabe 3 (stetige Abhängigkeit von den Koeffizienten | 4 Punkte).

Gegeben seien ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$ und zwei gleichmässig elliptische Differentialoperatoren $\mathcal{L}$, $\widehat{\mathcal{L}}$ der Form

$$(\mathcal{L}u)(\mathbf{x}) = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(\mathbf{x}) u_{x_i,x_j}(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad (\widehat{\mathcal{L}}u)(\mathbf{x}) = -\sum_{i,j=1}^{d} \widehat{a}_{i,j}(\mathbf{x}) u_{x_i,x_j}(\mathbf{x}),$$

wobei $a_{i,j}, \widehat{a}_{i,j} \in C(\overline{\Omega})$ sind und beide Differentialoperatoren der gleichen Elliptizitätskonstante $\alpha > 0$ genügen. Seien weiter $f \in C(\overline{\Omega})$ und $u, \widehat{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gegeben, so dass

$$\mathcal{L}u = f, \quad \widehat{\mathcal{L}}\widehat{u} = f \quad \text{und} \quad u(\mathbf{x}) = \widehat{u}(\mathbf{x}) \text{ für } \mathbf{x} \in \Gamma$$

gelten.

Leiten Sie eine obere Schranke für den Ausdruck $\|u - \widehat{u}\|_{C(\overline{\Omega})}$ her, wobei sämtliche Summanden der Schranke jeweils einen der Normen $\|a_{i,j} - \widehat{a}_{i,j}\|_{C(\overline{\Omega})}$ als einen Faktor aufweisen sollen.