Universität Basel

Prof. Dr. H. Harbrecht
M. Schmidlin

Numerik der Differentialgleichungen Herbstsemester 2020

Übungsblatt 8.

Abgabe bis: **Montag, 09.11.2020, 12:00**

Aufgabe 1 (A-Stabilität und explizite Runge-Kutta-Verfahren | 4 Punkte)**.**

Beweisen Sie wie folgt, dass explizite Runge-Kutta-Verfahren niemals A-stabil sind:

(a) Zeigen Sie, dass ein explizites, m-stufiges Runge-Kutta-Verfahren, angewendet auf das Anfangswertproblem $y'(x) = \lambda y(x)$, Werte

$$\eta_{i+1} = p(h\lambda)\eta_i$$

liefert, wobei p ein Polynom von Grad kleiner gleich m ist.

(b) Folgern Sie, dass das Stabilitätsgebiet von expliziten Runge-Kutta-Verfahren beschränkt ist, womit die Behauptung folgt.

Aufgabe 2 (A-Stabilität und lineare Mehrschrittverfahren | 4 Punkte)**.**

Zu einem linearen Mehrschrittverfahren

$$\sum_{\ell=0}^{k} \alpha_\ell \eta_{i+\ell} = h \sum_{\ell=0}^{k} \beta_\ell f(x_{i+\ell}, \eta_{i+\ell})$$

definieren wir die Polynome

$$p(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \alpha_\ell x^\ell \quad \text{und} \quad s(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \beta_\ell x^\ell.$$

(a) Seien η_i die Werte des linearen Mehrschrittverfahrens, angewendet auf die Testgleichung $y'(x) = \lambda y(x)$. Zeigen Sie, dass die η_i der linearen homogenen Differenzengleichungen mit charakteristischem Polynom $p(x) - h\lambda s(x)$ genügen.

(b) Schliessen Sie, dass $\lim_{i\to\infty} \eta_i = 0$ genau dann für jede Wahl von Anlaufwerte gilt, wenn

$$\frac{p(z)}{s(z)} \neq \lambda h \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq 1 \text{ ist.}$$

Hinweis. *Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass $s(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$ ist.*

Aufgabe 3 (Wurzelortskurve | 4 Punkte)**.**

Ausgehend von den Bezeichnungen in Aufgabe 2 definieren wir die *Wurzelortskurve* des dortigen k-Schrittverfahrens durch

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{p(e^{i\varphi})}{s(e^{i\varphi})} \,:\, \varphi \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Wie aus Aufgabe 2 folgt, enthält diese Kurve den Rand des Stabilitätsgebietes des k-Schrittverfahrens. Bestimmen Sie die Wurzelortskurve des θ-Schemas,

$$\eta_{i+1} = \eta_i + h\big[(1-\theta)f(x_i, \eta_i) + \theta f(x_{i+1}, \eta_{i+1})\big],$$

und ermitteln Sie damit alle θ, bei denen das θ-Schema A-stabil ist.

Aufgabe 4 (Galerkin-Verfahren | 4 Punkte)**.**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad x \in I := [a, b], \quad y(a) = y_a.$$

Für $a = x_0 < x_1 < \ldots x_{n-1} < x_n = b$ eine Zerlegung von I setzen wir $I_k := (x_{k-1}, x_k]$ und $h_k := x_k - x_{k-1}$ für $k = 1, \ldots, n$. Wir definieren damit den Raum

$$V_h := \big\{\varphi\colon I \to \mathbb{R} \,:\, \varphi|_{I_k} \text{ sei für alle } k = 1, 2, \ldots, n \text{ stetig differenzierbar} \\ \text{und stetig auf } \overline{I_k} \text{ fortsetzbar}\big\}$$

und für eine Funktion $v \in V_h$ die Grenzwerte und Sprünge

$$v_k^+ := \lim_{x \searrow x_k} v(x), \quad v_k^- := \lim_{x \nearrow x_k} v(x), \quad [\![v]\!]_k := v_k^+ - v_k^-.$$

Die *Variationsformulierung* des Anfangswertproblem lautet dann: Finde $y \in V_h$ mit $y(a) = y_a$, so dass

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\int_{I_k} \big(y'(x) - f(x, y)\big)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + [\![y]\!]_{k-1}\varphi_{k-1}^+ \right] = 0 \text{ für alle } \varphi \in V_h.$$

(a) Zeigen Sie, dass jede Lösung des Anfangswertproblems auch Lösung der Variationsformulierung ist. (Die Umkehrung gilt ebenfalls, braucht aber nicht gezeigt werden!)

(b) Schränkt man die Variationsformulierung auf $S_h^0 \subset V_h$ ein, mit

$$S_h^0 := \big\{\varphi \in V_h \,:\, \varphi|_{I_k} = \mathit{const} \text{ für alle } k = 1, 2, \ldots, n\big\},$$

so erhält man ein *Galerkin-Verfahren.* Zeigen Sie: Ersetzt man in diesem Galerkin-Verfahren die Integrale durch die Quadraturformel

$$\int_{I_k} g(x)\,\mathrm{d}x \approx h_k g(x_k)$$

und die *Testfunktionen* φ durch die charakteristischen Funktionen χ_{I_k}, so ergibt sich das implizite Euler-Verfahren.